جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الخامس الأدبي

تأليف
د. عبد علي حمودي الطائي
د. مهدي صادق عباس   د. طارق شعبان رجب الحديثي
محمد عبد الغفور الجواهري   حسام علي حيدر
صباح علي مراد   سعد محمد حسين البغدادي
نظير حسن علي

الطبعة الثانية عشرة   ١٤٤٣هـ - ٢٠٢١م

المشرف العلمي على الطبع

م.م. مروة فليح حسن

المشرف الفني على الطبع

تيسير عبد الإله إبراهيم

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج

www.manahj.edu.iq
manahjb@yahoo.com
Info@manahj.edu.iq
manahjb
manahj

المديرية العامة للمناهج
قسم التحضير الطباعي

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمــة

تعنى وزارة التربية بإِعادة النظر في الكتاب المدرسي من حين إلى آخر وتعديله حيناً آخر واستبداله حيناً آخر وفق ما تقرره لجان مختصة تؤلف لهذا الغرض . وتلقى كتب الرياضيات نصيبها الوافي من هذه العناية.

وهذا الكتاب الثاني من سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة الإِعدادية للفرع الأدبي ، وقد رتبنا هذا الكتاب باربعة فصول ، يبدأ الفصل الأول بموضوع اللوغاريتمات، والفصل الثاني ندرس فيه موضوع المتتابعات، أما الفصل الثالث فيتناول موضوع المصفوفات والمحددات،وينتهي الكتاب بموضوع الإِحصاء .

لقد تم وضع هذا الكتاب وفقاً للمنهج الدراسي المقرر وحاولنا إن نستخدم الطرق التربوية الحديثة فقمنا بهذا المجهود واضعين نصب أعيننا شرح كل مادة من مواده شرحاً يقربها من الافهام وتوخينا الإِكثار من التمارين العملية التي يصادفها الطالب في حياته العملية ، ومتدرجة من السهل إلى الصعب .

وختاماً نرجو إن نكون قد وفقنا إلى خدمة أبنائناالطلبة ، ونرجو من إخواننا المدرسين أن يوافونا بملاحظاتهم حول هذا الكتاب لكي نتلافى النقص فيه والكمال لله وحده.

المؤلفون

المحتـــــويات

الفصل الأول : اللوغاريتمات

الفصل الثاني : المتتابعات

المحتـــــويات

الفصل الثالث : المصفوفات والمحددات

المحتـــــويات

الفصل الرابع : الإحصاء

الفصل الاول
CHAPTER 1

اللوغاريتمـــــات

نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات

اكتشفت اللوغاريتمات في اوائل القرن السابع عشر ، لاهميتها في تبسيط الحسابات المعقدة للعلوم الطبيعية والهندسية . واللوغاريتمات اساسية في الحسابات التجارية والفكرة القائمة عليها اللوغاريتمات هي تحويل الاعداد على شكل أس والتعامل معها عوضاً عن الاعداد الاصلية .

وفيما يلي بعض استخدامات اللوغاريتمات :-

- استخدامه في قياس قوة الزلزال على مقياس ريختر .
- يصف الرقم الهيدروجيني للمادة (pH) درجة حموضة المادة والتي تحسب باستخدام اللوغاريتمات للاساس 10 حيث الرقم الهيدروجيني $pH = -Log(H^+)$

H^+ تركيز ايون الهيدروجين في المادة

- يستخدم في قياس شدة الصوت (L) بالديسيبل حيث

$L = 10 Log \frac{a}{a_\circ}$ حيث a : شدة الصوت

$a_\circ$: اقل شدة للصوت تستطيع اذن انسان عادي ان تميزه

- حساب سرعة الصواريخ (V) حيث

$$V = -0.0098 N + v_0 Ln(R)$$

N : زمن اشتعال وقود المحرك

v_0 : سرعة انطلاق البخار

R : نسبة كتلة الصاروخ محمل بالوقود الى كتلته بدون وقود

Ln : اللوغاريتم الطبيعي

- في الاحصاء يستخدم في :

حساب الفائدة المركبة المستمرة a حيث

$$a = M e^{R \times N}$$

M : المبلغ المستثمر

R : الفائدة

N : عدد السنوات

- حساب الوسط الهندسي

$$\text{Geometric Mean} = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots\ldots X_n}$$

في البنود اللاحقة سندرس اللوغاريتمات العشرية والطبيعية.

البيئة بيتنا الكبير ... فلنعمل على جعله صحياً ونظيفاً.

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Functions

تواصل الموضوع

لقد تعرفنا فيما سبق على الدالة الحقيقية والان سندرس انواع اخرى من الدوال مثل الدالة الاسية والدالة اللوغاريتمية

لناخذ الدالة الحقيقية $f: R \longrightarrow R^{+}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = 2^{x}$

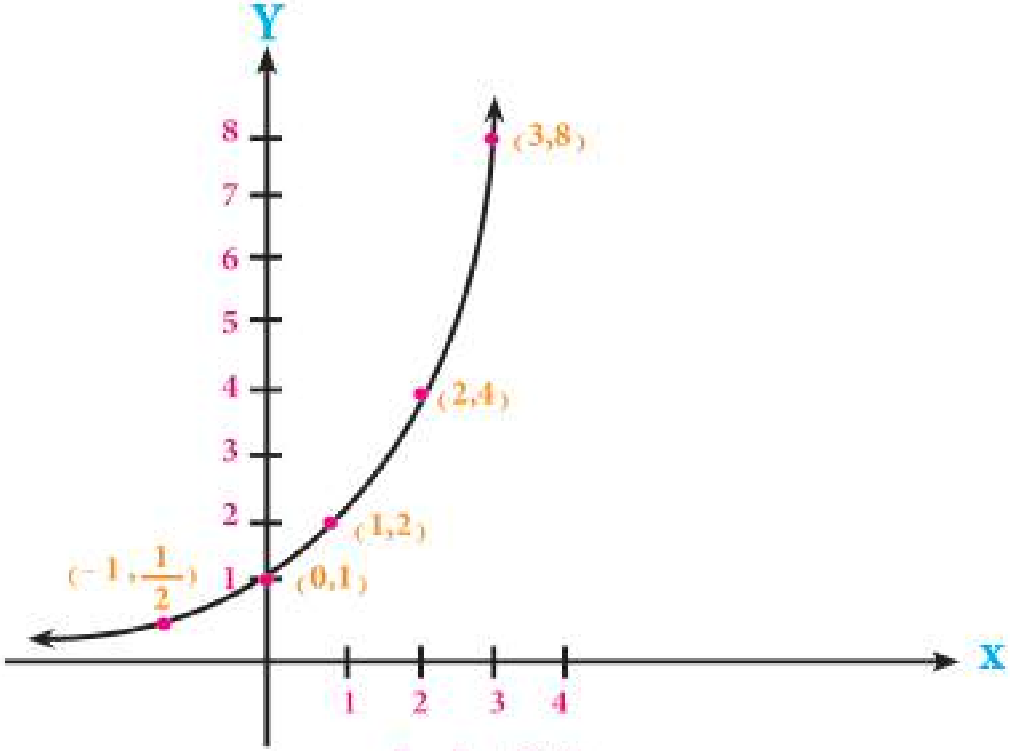
الجدول (1 - 1) يعطينا بعض الازواج المرتبة لبيان الدالة f

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
f (x)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

الجدول (1 - 1)

ان كل زوج مرتب $(x, 2^{x})$ يعين نقطة في المخطط البياني للدالة f . وبتمثيل الازواج المرتبة في المستوي الاحداثي نحصل على الشكل (1 - 1) الذي يمثل جزءاً من التمثيل البياني للدالة

$f(x) = 2^{x}$



الشكل (1 - 1)

من هذا الشكل يمكننا تحديد قيمة تقريبية للدالة $f(x) = 2^x$ عند اي قيمة معلومة للمتغير x ، وبالعكس .

فمثلاً : عندما $x = 1.4$ فمن الشكل نجد ان $2^{1.4} = 2.7$ تقريباً

واذا كان $2^x = 6.2$ فمن الشكل نجد ان $x = 2.65$ تقريباً

ان مثل هذه الدالة تسمى دالة اسية وتعرف كما يلي :

تعريف (1 - 1)

اذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ فان الدالة :

$f : R \Longrightarrow R^+$ حيث $f(x) = a^x ,\ \forall x \in R$

حيث $f(x) = a^x$ تسمى الدالة الأسية للاساس a

سنقبل بأن الدالة الأسية تقابل .

ملاحظة

اذا كان $a = 1$ فان $f(x) = 1^x = 1$ دالة ثابتة وهذا ما جعلنا نقول $a \neq 1$

[2 – 1] الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

تواصل الموضوع

لقد درسنا سابقاً الدالة الأسية $f(x) = a^x$ حيث $f: R \Longrightarrow R^+$ وبما أن لكل دالة تقابل دالة عكسية فإن للدالة الأسية دالة عكسية f^{-1} . وهي دالة تقابل

$f^{-1}: R^+ \Longrightarrow R$

فمجالها R^+ هو المجال المقابل للدالة الأسية ، ومجالها المقابل R **Codomain** هو مجال **Domain** الدالة الأسية والتي هي تقابل ايضاً والتي تسمى بالدالة اللوغاريتمية .

تعريف (2 – 1)

يرمز للدالة العكسية للدالة $y = a^x$

بالرمز $x = Log_a\ y$ ونقول ان x هو لوغاريتم y للاساس a ويمكننا ان نكتب العلاقة الآتية

$x = Log_a\ y \Longleftrightarrow y = a^x$

حيث R^+ ö *y x ö R

مثال 1

اكتب $5^3 = 125$ بالصورة اللوغاريتمية .

الحل

$5^3 = 125$ يكافئ $y = a^x$ صورة أسية

$x = Log_a\ y$ يكافئ $Log_5 125 = 3$

مثال 2

اكتب $Log_2\ 32 = 5$ بالصورة الأسية

الحل

$Log_a\ y = x$ يكافئ $Log_2 32 = 5$ صورة لوغاريتمية

$y = a^x$ يكافئ $32 = 2^5$ صورة أسية

تدريب

اكتب الصورة المكافئة لكل مما يأتي :

$Log_{10} 10000 = 4$ ، $7^3 = 343$ ، $Log_5 1/25 = -2$ ، $(0.01)^2 = 0.0001$

[3 – 1] خواص الدالة اللوغاريتمية

من خواص الدالة اللوغاريتمية ما يلي :

(a) لكل عدد حقيقي موجب لوغاريتم، وليس للاعداد الحقيقية السالبة والصفر لوغاريتمات حقيقية.

(b) بما ان الدالة اللوغاريتمية تقابل فان :

$$x , y \in R^+ \ ، \ \text{Log}_a x = \text{Log}_a y \Longleftrightarrow x = y$$

(c) لما كان $a \neq 1$ ، $a > 0$ فلكل $x , y \in R^+$ سنقبل القواعد الاتية بدون برهان :

(1) $\text{Log}_a xy = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$

(2) $\text{Log}_a \frac{x}{y} = \text{Log}_a x - \text{Log}_a y$

(3) $\text{Log}_a x^n = n\text{Log}_a x$ ، حيث $n \in R$

(4) $\text{Log}_a a = 1$

(5) $\text{Log}_a 1 = 0$

مثال 3

أثبت ان $\text{Log}_2 (\frac{17}{5}) - \text{Log}_2 (\frac{34}{45}) + 2\text{Log}_2 (\frac{2}{3}) = 1$

الحل

الطرف الايسر : $\text{Log}_2 (\frac{17}{5}) - \text{Log}_2 (\frac{34}{45}) + \text{Log}_2 (\frac{2^2}{3^2})$

$= \text{Log}_2 \frac{17}{5} \times \frac{45}{34} \times \frac{4}{9}$

$= \text{Log}_2 2$

$= 1$ الطرف الايمن

(و . هـ.م)

مثال 4

جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(a) $\log_3 x = 4$

(b) $\log_x 64 = 6$

(c) $\log_5 \frac{1}{125} = x$

الحل

(a) $\log_3 x = 4 \Longrightarrow x = 3^4 \Longrightarrow x = 81$

S ;81} y ⌞

(b) $\log_x 64 = 6 \Longrightarrow 64 = x^6 \Longrightarrow 2^6 = x^6 \Longrightarrow x = \quad 2$

⌜ x = 2 n R^+

⌞ S = 2y}

(c) $\log_5 \frac{1}{125} = x \Longrightarrow \frac{1}{125} = 5^x \Longrightarrow 5^{-3} = 5^x$

$\therefore x = -3$

⌞ $S = \{-3\}$

تمارين [1 - 1]

س1 / فيما يلي علاقات غير صحيحة دائما ، مثلاً اعط $y = a$ ، $x = a$ وبين ذلك .

(a) $\text{Log}_a (x + y) \ : \ \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$

(b) $\text{Log}_a (x - y) \ : \ \dfrac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a y}$

(c) $\text{Log}_a xy \ : \ \text{Log}_a x \ \ \text{Log}_a y$

(d) $\text{Log}_a x^2 \ : \ (\text{Log}_a x)^2$

س2 / جد قيمة x :

(a) $\text{Log}_{10} 0.001 = x$

(b) $\text{Log}_x \dfrac{1}{8} = -3$

(c) $\text{Log}_{10} x = 5$

س3 / جد قيمة ما يأتي :

(a) $\text{Log}_{10} (\dfrac{40}{9}) + 4 \text{Log}_{10} 5 + 2 \text{Log}_{10} 6$

(b) $2\text{Log}_{10} 8 + \text{Log}_{10} 125 - 3 \text{Log}_{10} 200$

(c) $\text{Log}_a (x^2 - 1) - 2 \text{Log}_a (x - 1) + \text{Log}_a \dfrac{(x-1)}{(x+1)}$

(d) $\text{Log}_2 8 - \text{Log}_3 27 - \text{Log}_5 625$

س4 / اذا كانت $\text{Log}_{10} 3 = 0.4771$ ، $\text{Log}_{10} 2 = 0.3010$ جد قيمة :

(a) $\text{Log}_{10} 0.002$

(b) $\text{Log}_{10} 3000$

(c) $\text{Log}_{10} 12$

س5 / حل المعادلات الآتية :

(a) $\text{Log}_3 (2x - 1) + \text{Log}_3 (x + 4) = \text{Log}_3 5$

(b) $\text{Log}_2 (3x + 5) - \text{Log}_2 (x - 5) = 3$

تواصل الموضوع

سبق وان درسنا اللوغاريتم لاي اساس $1 : a$ ، $a > 0$

والان سنتعرف على لوغاريتم اساسه $a = 10$. يسمى اللوغاريتم العشري (اللوغاريتم الاعتيادي) . وقد اتفق على عدم كتابة الاساس (10) حين استعماله . حيث $Log_{10}\, y$ يكتب بشكل $Log\, y$

فمثلاً : $Log_{10}7$ يكتب بشكل $Log7$ وكذلك $Log_{10}\, 0.05$ يكتب بشكل $Log\, 0.05$ ومن المفيد هنا ان نذكر بعض اللوغاريتمات للقوى الصحيحة للعدد 10 معتمدين على : $Log\, 10^{n} = n$

n	← –	−3	−2	−1	0	1	2	3	+ →
$Log10^{n}$	....	−3	−2	−1	0	1	2	3	

فمثلاً : $Log\, 10^{4} = 4$ ، $Log\, 10^{7} = 7$ .....

$Log\, 0.00001 = Log\, 10^{-5} = -5$ ، $Log\, 0.01 = Log\, 10^{-2} = -2$ .....

تواصل الموضوع

تعرفت على اللوغاريتمات العشرية حيث كان الاساس $a = 10$

والان سنتعرف على اللوغاريتمات التي اساسها $a = e \;\; 3 \;\; 2.71828$

والتي تسمى باللوغاريتمات الطبيعية والتي تكتب بشكل

$\ln y$ حيث $e = a \simeq 2.71828$

اذا وضعنا ، $a = e$ في تعريف (2 – 1) فنحصل على

$$y = e^{x} \Longleftrightarrow x = \ln y$$

ملاحظة

للاطلاع

$$e = 2.718281828459045$$

ويمكن ايجادها بالعلاقة

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)^{n} \quad \text{or} \quad \lim_{n \to \infty} \left(2 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots \quad \frac{1}{n!}\right)$$

نتيجة 1

$\ln(e^x) = x ، \forall x \in R$

البرهان

$\ln e^x = x \ln e$

$= x \times 1$

$= x$

مثال 1

جد قيمة x اذا علمت ان

$e^{2x-1} = 8$

الحل نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$\ln e^{2X-1} = \ln 8$ وحسب النتيجة (1)

$\therefore 2X - 1 = \ln 8$

$2X = 1 + \ln 8$

$\therefore X = \frac{(1 + \ln 8)}{2}$

نتيجة 2 (تبديل الاساس)

$\forall \; a > 0 ، a \neq 1$

$$\text{Log}_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

أو يمكن أن يكتب بالشكل :

$$\text{Log}_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$$

البرهان

الطرف الايسر

نفرض(1) .... $y = Log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفي العلاقة (1)

$$\ln x = \ln a^y$$

$$\ln x = y \ln a$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$ الطرف الأيمن

وبنفس الطريقة وبأخذ اللوغاريتم العشري لطرفي العلاقة (1) نستنتج إن :

$$Log_a x = \frac{Log\, x}{Log\, a}$$

مثال 2

ما قيمة $\frac{1}{Log_5 15} + \frac{1}{Log_3 15}$

الحل

باستخدام نتيجة (2)

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 5}} + \frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 5}{\ln 15} + \frac{\ln 3}{\ln 15}$$

$$\Rightarrow \frac{(\ln 3 + \ln 5)}{\ln 15}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 15}{\ln 15} = 1$$

تواصل الموضوع

بعد دراستنا للوغاريتمات الطبيعية والعشرية وبعض قوانين اللوغاريتمات ، الان سندرس كيفية استخدام الحاسبة **Calculator** لايجاد لوغاريتم عدد ولوغاريتمات الاعداد المقابلة وكتطبيق كما درسناه سابقاً .

اولاً : ايجاد لوغاريتم العدد

(1) في حالة اللوغاريتمات العشرية : (Log)

○ نكتب العدد المراد إيجاد لوغاريتمه ثم نضغط على المفتاح **Log** فيظهر الناتج .

مثال 1

جد :

(a) Log 7 ، (b) Log 13 ، (c) Log 0.08 ، (d) Log 1.5

الحل

(a) نكتب 7 ثم نضغط على **Log** فيكون الناتج **0.84509804**

اي **Log 7 = 0.84509804**

(b) نكتب العدد 13 ثم نضغط **Log** فيكون الناتج **1.11394335**

(c) نكتب العدد 0.08 ثم نضغط **Log** فيكون الناتج **−1.096910013**

(d) نكتب العدد 1.5 ثم نضغط **Log** فيكون الناتج **0.176091259**

(2) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية :(ln)

○ نكتب العدد المراد إيجاد لوغاريتمه ثم نضغط على المفتاح ln فيظهر الناتج

مثال 2

جد

(a) $\ln 7$

(b) $\ln 13$

(c) $\ln 0.08$

(d) $\ln 1.5$

الحل

(a) نكتب العدد 7 ثم نضغط على ln فيكون الناتج 1.94510149

(b) نكتب العدد 13ثم نضغط على ln فيكون الناتج 2.564949357

(c) نكتب العدد 0.08 ثم نضغط على ln فيكون الناتج – 2.525728644

(d) نكتب العدد 1.5ثم نضغط على ln فيكون الناتج 0.405465108

ثانياً : إيجاد العدد المقابل اذا علم لوغاريتمهُ

(1) في حالة اللوغاريتمات العشرية :

○ نكتب لوغاريتم العدد (المعطى) ونضغط على مفتاح 2ndF ويكون مغاير للاسود (اصفر ، ازرق...) ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر العدد المطلوب.

مثال 3

جد الاعداد المقابلة للاعداد التي لوغاريتماتها العشرية هي :

(a) 0.84509804

(b) 1.113943352

(c) − 1.096910013

(d) 0.176091259

الحل

(a) نكتب 0.84509804 ثم نضغط على 2nd F ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر 7

(b) نكتب 1.113943352 ثم نضغط على 2ndF ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر 13 ≃ 12.99999999

(c) نضغط مفتاح [−] نكتب 0.096910013 وثم نضغط [=] فيظهر −1.096910013 ثم نضغط 2nd F ثم Log فيظهر 0.08

(d) نكتب 0.176091259 نضغط على 2nd F ثم Log فيظهر 1.5

ملاحظة

(قارن نتائج مثال (1) مع هذا المثال)

(2) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية (ln)

m نكتب لوغاريتم العدد (المعطى) ونضغط على مفتاح 2ndF ثم نضغط على مفتاح ln فيظهر العدد المطلوب.

مثال 4

جد الاعداد المقابلة للاعداد التي لوغاريتماتها الطبيعية هي:

(a) 1.945910149

(b) 2.564949357

(c) $^{-}$2.525728644

(d) 0.405465108

الحل

(a) نكتب 1.945910149 ثم نضغط 2ndF ثم مفتاح ln فيظهر 7

(b) نكتب 2.564949357 ثم نضغط 2ndF ثم مفتاح ln فيظهر 12.99999999 ≃ 13

(c) نضغط [–] نكتب 2.525728644 ثم [=] فيظهر 2.525728644 –
ثم نضغط 2ndF ثم ln فيظهر 0.08

(d) نكتب 0.405465108 نضغط 2ndF ثم ln فيظهر 1.5

امثلة تطبيقية على قواعد اللوغاريتمات (استخدم آلتك الحاسبة)

مثال 1

جد قيمة $\text{Log}_8 5$

الحل

بتبديل الاساسات الى اساس 10 يكون (نتيجة 2)

$$\text{Log}_8 5 = \frac{\text{Log } 5}{\text{Log } 8} = \frac{0.69897}{0.90309} \quad 0.77397$$

مثال 2

جد قيمة $\text{Log } 3 + \ln 3$

الحل

$\text{Log } 3 = 0.4771$

$\ln 3 = 1.0986$

ﷲ $\ln 3 + \text{Log } 3$

$= 1.0986 + 0.4771$

$= 1.5757$

مثال 3

جد قيمة $\text{Log}_5 7 - \text{Log}_5 14$

الحل

$\text{Log}_5 14 - \text{Log}_5 7$

$\text{Log}_5 \frac{14}{7}$

وباستخدام تبديل الاساس $\text{Log}_5 2$

$$\frac{\text{Log } 2}{\text{Log } 5} = \frac{0.3010}{0.6989} \; 3 \; 0.4307$$

مثال 4

جد قيمة $x = \sqrt[3]{(65.26)^2}$

الحل

$x = (65.26)^{2/3}$

$\text{Log } x = \frac{2}{3} \text{Log } 65.26$ وباستخدام الآلة الحاسبة

$\text{Log } x = \frac{2}{3} \times 1.8147$

$\text{Log } x = 1.2098$

x 3 16.2106

مثال 5

حل المعادلة $7^{3x} = 81$

الحل

$7^{3x} = 81$

نأخذ Log_7 للطرفين

$\text{Log}_7 7^{3x} = \text{Log}_7 81 \Longrightarrow 3x \text{ Log}_7 7 = \frac{\text{Log } 81}{\text{Log } 7}$

$3x = \frac{\text{Log } 81}{\text{Log } 7}$ باستخدام الآلة الحاسبة

$3x = \frac{1.9085}{0.8451}$

3x 3 2.2583

x 0.7528

$\therefore S = \{0.7528\}$

مثال 6

بفرض انك تستثمر (2) مليون دينار بفائدة مركبة سنوية مستمرة قدرها ٪5.5 . اوجد جملة ما ستحصل عليه بعد (5) سنوات .

الحل

قانون حساب الفائدة المركبة المستمرة هو $a = M e^{R \times N}$

حيث M:المبلغ ، R : الفائدة ، N: عدد السنوات

$$a = 2000000 \times e^{\frac{55}{1000} \times 5}$$

$a = 2000000\ e^{0.275}$ باخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$\ln a = \ln 2000000 + 0.275 \text{ Ln } e$$

$$\ln a = 14.78365774$$

$$a \simeq 2633061$$

مثال 7

جد الوسط الهندسي للاعداد : 99 ، 120 ، 110 ، 93 ، 105 .

الوسط الهندسي $\text{Geometric mean} = \sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots\ldots \times X_n}$

الوسط الهندسي $= \sqrt[5]{105 \times 93 \times 110 \times 120 \times 99}$

Log (الوسط الهندسي) $= \frac{1}{5}[(\text{Log } 99 + \text{Log } 120 + \text{Log } 110 + \text{Log } 93 + \text{Log } 105)]$

$$= \frac{1}{5}(10.105881)$$

$$= 2.021176$$

باستخدام الآلة الحاسبة لايجاد العدد المقابل نجد ان

الوسط الهندسي = 104.996851

تمارين [2 – 1]

(استخدم آلتك الحاسبة)

س1/ جد قيمة كل من : $\ln\ 20$ ، $Log_5\ 11$ ، ، $Log_{10}\ 8$

س2/ جد قيمة كل مما يأتي :

(a) $2\,Log_4\ 58 - Log_7\ 21$

(b) $Log_6\ 26 + Log\ 26 + \ln\ 26$

س3/ جد قيمة كل مما يأتي :

(a) $\sqrt[4]{0.0562}$ (b) $(11.023)^9$

س4/ حل كلا مما يأتي :

(a) $2^x = 25$ (b) $e^{2x+1} = 10$

س5/ باستخدام قانون الفائدة المركبة $a = M\,e^{R \times N}$ لاستثمار مليون دينار بفائدة قدرها ٪ 3.5 ولمدة (3) سنوات . جد جملة ما ستحصل عليه .

س6/ جد الوسط الهندسي للاعداد : 4 ، 82 ، 90 ، 89 ، 71 ، 60 ، 88 ، 96 ، 84 ، 93

س7/ اثبت ان :

(a) $\dfrac{1}{Log_a\ a\,b\,c} + \dfrac{1}{Log_b\ a\,b\,c} + \dfrac{1}{Log_c\ a\,b\,c} = 1$

(b) $Log\ 40/9 + 2(2Log\ 5 + Log\ 6) = 5$

س8/ اي مقدار (مقادير) يكافئ المقدار $3Log\ a + Log\ b$ ؟

(a) $Log\ (ab)^3$

(b) $Log\ a^3\,b$

(c) $Log\ a^3 \times Log\ b$

(d) $Log\ a^3 + Log\ b$

س9/ اختر الاجابة الصحيحة اذا علمت ان $Log\ a \times b$ هي :

(a) $Log\ a \times Log\ b$

(b) $Log\ a + Log\ b$

(c) $Log\ (a + b)$

(d) ليس اي منها

الفصل الثاني
CHAPTER 2

المتتابعات Sequences

[2-1] مقدمة

لقد درسنا كثيراً من المفاهيم (المعلومات) في السنوات السابقة في مادة الرياضيات ولكن مايهمنا استذكاره في هذا الفصل مايأتي:

1) مجموعة الاعداد الصحيحة (**Integers**) الموجبة $Z^+=\{1,2,3,4,...\}$ التي هي نفسها مجموعة الاعداد الطبيعية عدا الصفر (**Natural**) $N^+=\{1,2,3,4,...\}$.

2) معنى الدالة(**Function**) وتمثيل بعض انواع الدوال

3) تكون الدالة معلومة متى ماكان كل من قاعدة اقترانها ومجالها(**Domain**) ومجالها المقابل (**codomain**) معلوماً.

4) تسمى الدالة عددية اذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعات جزئية غير خالية من مجموعة الاعداد الحقيقية (**R**) **Real Numbers** .

في هذا الفصل سندرس دوالاً من شكل خاص يكون مجالها مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة Z^+ [او نفس المعنى مجموعة الاعدادالطبيعية عدا الصفر N^+] ومجالها المقابل اي مجموعة غير خالية.

تعريف (2-1)

كل دالة مجالها المجموعة Z^+ [او N^+] او مجموعة جزئية من Z^+ بالشكل $\{1,2,3,\ldots,n\}$ حيث n عدد طبيعي {صحيح}موجب معين ومجالها المقابل مجموعة جزئية غير خالية تسمى متتابعة «sequense» .

في هذا الفصل سنركز اهتمامنا على دراسة المتتابعات التي يكون مجالها المقابل مجموعات جزئية غير خالية من «R».

بما إن جميع المتتابعات مجالها المجموعة Z^+ او مجموعة جزئية غير خالية فيها بالفعل $\{1,2,3,\ldots,n\}$ سوف نهمل ذكر المجال ونكتفي بذكر قاعدة الاقتران فقط .

t امثلة

$U(n)= 2n-5 \quad \forall\ n\in Z^+$ [او نقول $n\in N^+$] وأن

$U(1)=2\times1-5= -3$	يسمى الحد الاول للمتتابعة ويرمز له U_1
$U(2)=2\times2-5= -1$	يسمى الحد الثاني للمتتابعة ويرمز له U_2
$U(3)=2\times3-5 =1$	يسمى الحد الثالث للمتتابعة ويرمز له U_3
$U(4)=2\times4-5 = 3$	يسمى الحد الرابع للمتتابعة ويرمز له U_4
$U(5)=2\times5-5 = 5$	يسمى الحد الخامس للمتتابعة ويرمز له U_5
$U(6)=2\times6-5 = 7$	يسمى الحد السادس للمتتابعة ويرمز له U_6

وهكذا $U(n)= 2n-5$ يسمى الحد النوني (الحد n) للمتتابعة ويرمز له بالرمز Un وعليه فإن

$U = \{(1,-3),(2,-1),(3,1),(4,3),(5,5),\ldots,(n,2n-5),\ldots\}$

او تكتب بالشكل

$U = \{(n,2n-5): \quad n\in Z^+\}$

ولكن كما ذكرنا اننا سوف نهمل ذكر المجال فلذلك يمكن أن نهمل مجموعة المساقط الاولى ونكتفي بكتابة مجموعة المساقط الثانية

U1,U2,U3,U4,...,Un,...

ولتمييزها عن المجموعات سنكتب حدود المتتابعة بين قوسين من الشكل « 〈 〉 » فنكتب المثال السابق كما يأتي :

$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, U4, \ldots, Un, \ldots \rangle$

او بالشكل

$\langle -3, -1, 1, 3, \ldots, 2n-5, \ldots \rangle$

امثلة

اكتب الحدود الستة الاولى لكل من المتتابعات الآتية ثم اكتب المتتابعة بالشكل اعلاه (كما في المثال السابق)

1) $\langle Un \rangle = \langle n^2 \rangle$

الحد الاول	$U1 = 1^1 = 1$
الحد الثاني	$U2 = 2^2 = 4$
الحد الثالث	$U3 = 3^2 = 9$
الحد الرابع	$U4 = 4^2 = 16$
الحد الخامس	$U5 = 5^2 = 25$
الحد السادس	$U6 = 6^2 = 36$

$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, U4, U5, U6, \ldots, Un, \ldots \rangle$

$= \langle 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots \rangle$

2) $\langle Hn \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$

$H1 = 1$

$H2 = \frac{1}{2}$

$H3 = \frac{1}{3}$

$H4 = \frac{1}{4}$

$H5 = \frac{1}{5}$

$H6 = \frac{1}{6}$

$\langle Hn \rangle = \langle H1, H2, H3, H4, \ldots, Hn, \ldots \rangle$

$= \langle 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots \rangle$

3) $\langle Un \rangle = 2n + (-1)^n$

$U1 = 2 \times 1 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$

$U2 = 2 \times 2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5$

$U3 = 2 \times 3 + (-1)^3 = 6 - 1 = 5$

$U4 = 2 \times 4 + (-1)^4 = 8 + 1 = 9$

$U5 = 2 \times 5 + (-1)^5 = 10 - 1 = 9$

$U6 = 2 \times 6 + (-1)^6 = 12 + 1 = 13$

$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, \ldots, 2n + (-1)^n, \ldots \rangle$

$= \langle 1, 5, 5, 9, 9, \ldots, 2n + (-1)^n, \ldots \rangle$

4) $U1 = 1,\ U_{n+1} = (n+1) . Un$

$U1 = 1$

$U2 = 2U1 = 2 \times 1 = 2$

$U3 = 3U2 = 3 \times 2 = 6$

$U4 = 4U3 = 4 \times 6 = 24$

$U5 = 5U4 = 5 \times 24 = 120$

$U6 = 6U5 = 6 \times 120 = 720$

$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, \ldots, (U1 = 1, Un+1 = (n+1) . Un), \ldots \rangle$

$= \langle 1, 2, 6, 24, \ldots, (U1 = 1, Un+1 = (n+1) . Un), \ldots \rangle$

ملاحظة (١)

نلاحظ ان المتتابعة $\langle Un \rangle = \langle 2,4,6,8,10,12 \rangle$ تختلف عن المتتابعة $\langle Hn \rangle = \langle 4,2,6,8,10,12 \rangle$ وهذا يعني ان [$H2 \neq U2$ اي ان $U2=4, H2=2$] وكذلك [$H1 \neq U1$ اي ان $U1=2, H1=4$] ان ترتيب حدود المتتابعة مهم ويؤثر في تغيير المتتابعة اي أن الترتيب يعتبر من الخواص المميزة للمتتابعات .

ملاحظة (٢)

لاحظ الامثلة الآتية

1) $\langle U_n \rangle = \langle n^2 - n \rangle$

$U_1 = 1^2 - 1 = 0 \qquad U_2 = 2^2 - 2 = 2$

$U_3 = 3^2 - 3 = 6 \qquad U_4 = 4^2 - 4 = 12$

تعلمنا ان U_1 يسمى الحد الاول للمتتابعة، U_2 حدها الثاني، ... وان $U_n = n^2 - n$ يسمى الحد n (النوني) للمتتابعة ويسمى ايضاً بحدها العام(General Term) اي انه في هذا المثال :

(الحد النوني) = الحد العام = $U_n = n^2 - n$

2) $\langle H_n \rangle = \langle 2^{n-1} \rangle$

$H_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \quad , \quad H_2 = 2^{2-1} = 2$

$H_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 4 \ldots$

والحد العام للمتتابعة هو $H_n = 2^{n-1}$

ملاحظة (٣)

المتتابعة التي يكون مجالها مجموعة جزئية غير خالية من (Z^+) وبالشكل $\{1,2,3,\ldots, n\}$ مرتبة تصاعدياً ابتدأ بالعدد (1) الى العدد المعيّن (n) تسمى متتابعة منتهية(Finite Sequence) اما التي مجالها (Z^+) تسمى متتابعة غير منتهية (Infinite Seqence).

امثلة

1) $U : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow R$

معرّفة كما يأتي $U_n = 2n - 9$

تكتب بذكر حدودها بالشكل

$\langle U_n \rangle = \langle -7, -5, -3, -1, 1, 3 \rangle$

$= \langle U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 \rangle$

حيث حدها الاول $U_1 = -7$ وحدها الاخير $U_6 = 3$ وعدد حدودها $n = 6$

2) $H : \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \longrightarrow R$

معرّفة كما يأتي $Hn = \frac{n+1}{n}$

$H1 = \frac{1+1}{1} = 2$ $\quad$ $H2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

$H3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $H4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$

$H5 = \frac{5+1}{5} = \frac{6}{5}$ $\quad$ $H6 = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$

$H7 = \frac{7+1}{7} = \frac{8}{7}$ $\quad$ $H8 = \frac{8+1}{8} = \frac{9}{8}$

$H9 = \frac{9+1}{9} = \frac{10}{9}$ $\quad$ $H10 = \frac{10+1}{10} = \frac{11}{10}$

$\langle Hn \rangle = \langle H1, H2, H3, H4, H5, H6, H7, H8, H9, H10 \rangle$

$$= \langle 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10} \rangle$$

حدها الاول $H1 = 2$

حدها الاخير $H10 = \frac{11}{10}$

عدد حدودها $n = 10$

بما ان المتتابعات موضوع دراستنا هي دوال عددية مجالها أما Z^+ او مجموعة بالشكل $\{1,2,3,4 \;, \ldots, \; n\}$ بشرط أن (n) عدداً صحيحاً موجباً معين وإنه يمكن تمثيل المتتابعات باشكال بيانية وكما موضح في الامثلة الآتية :

أمثلة

مثل الاشكال البيانية لكل من المتتابعات الاتية :

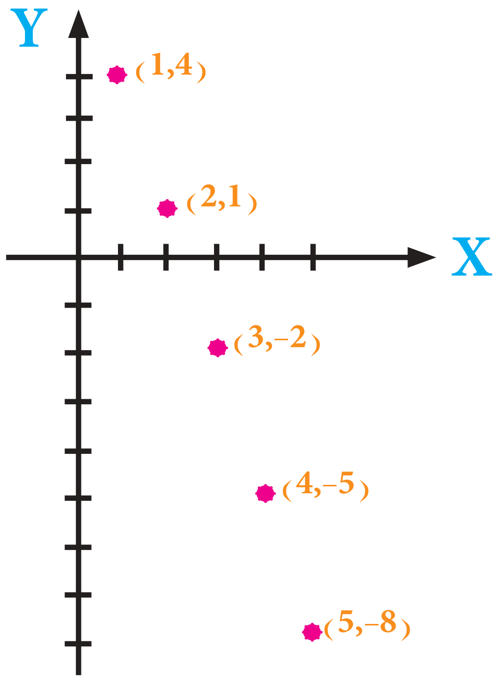
1) $\langle U_n \rangle = \langle 7 - 3n \rangle$

لتمثيل المتتابعة بيانيا نكتب عدداً معقولاً من حدودها ابتداءاً من الحد الاول ثم نرسم محوري الاحداثيات [محور السينات x − axis ومحور الصادات y − axis] ونعين المجال على محور السينات ونعتبر المجال المقابل «R» [اذا لم يذكره] والذي يعين على محور الصادات فنقول :

$U_1 = 4 , U_2 = 1 , U_3 = -2 , U_4 = -5 , U_5 = -8$

ونعين النقط

(1 , 4) , (2 , 1) , (3 , −2) , (4 , −5) , (5 , −8)

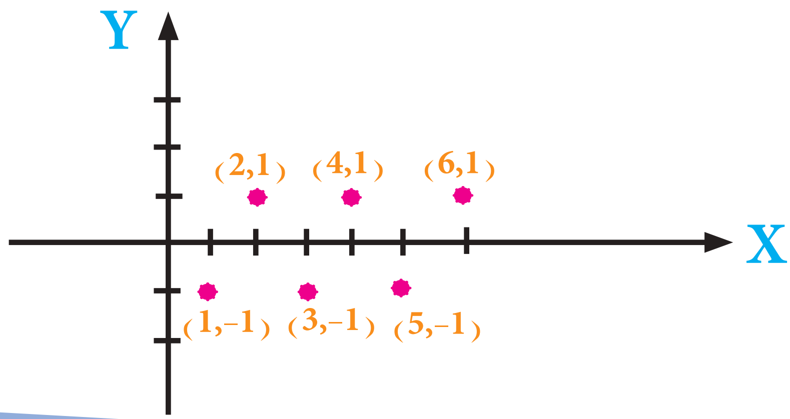


2) $\langle H_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$

$H_1 = -1 , H_2 = 1 , H_3 = -1 , H_4 = 1 , H_5 = -1 , H_6 = 1$

ونعين النقط

(1,−1) , (2,1) , (3,−1) , (4,1) , (5,−1) , (6,1)



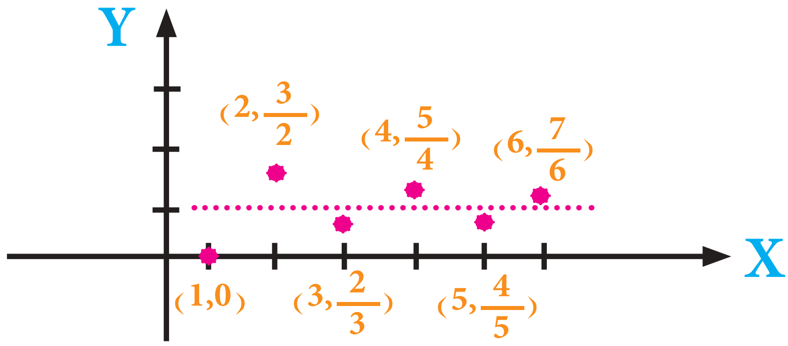
3) $\langle G_n \rangle = \langle 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rangle$

$G_1 = 1 - 1 = 0$ $\qquad G_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$G_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\qquad G_4 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$G_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ $\qquad G_6 = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

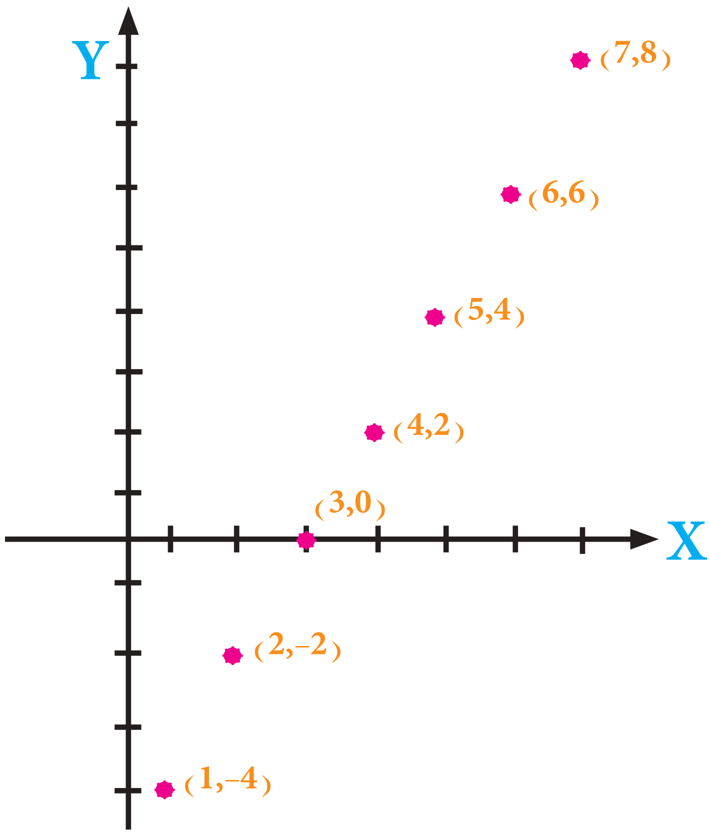
نعين النقاط $(1,0)$ ، $(2,\frac{3}{2})$ ، $(3,\frac{2}{3})$ ، $(4,\frac{5}{4})$ ، $(5,\frac{4}{5})$ ، $(6,\frac{7}{6})$



4) $\langle H_n \rangle = \langle -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8 \rangle$

نلاحظ ان هذه المتتابعة هي متتابعة منتهية وعليه نرسم حدودها بتعيين النقط

$(1,-4)$ ، $(2,-2)$ ، $(3,0)$ ، $(4,2)$ ، $(5,4)$ ، $(6,6)$ ، $(7,8)$



تمارين [1 -2]

لكل من المتتابعات الاتية اكتب الحدود السبعة الاولى ثم مثلها بيانياً :

1) $\langle U_n \rangle = \langle 1 + (-1)^n \rangle$

2) $\langle H_n \rangle = \langle 1 \ / \ n^2 + 1 \rangle$

3) $\langle H_n \quad n^2 - 3$

4) $\langle U_n \rangle = \langle 10 - 2n \rangle$

5) $\langle G_n \rangle = \langle 4 \rangle$

6) $U_n = \begin{cases} 3 & \text{عندما } n \text{ عدد فردي} \\ -3 & \text{عندما } n \text{ عدد زوجي} \end{cases}$

7) $\langle M_n \rangle = \langle -3 (-1)^n \rangle$

8) $\langle G_n \rangle = \langle 3^{n-1} \rangle$

9) $\langle M_n \rangle = \langle \frac{1-2n}{n} \rangle$

10) $\langle U_n \rangle = \langle \frac{8}{n} \rangle$

[2-3] المتتابعات الحسابية (العددية) Arithmetic Sequences

أمثلة

لنلاحظ الامثلة الاتية:

1) $\langle Un \rangle = \langle 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 \rangle$

2) $\langle Hn \rangle = \langle 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, -5, -10, -15 \rangle$

3) $\langle Gn \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 \rangle$

نلاحظ في المثال الاول ان

$U2 - U1 = 3 \quad , U3 - U2 = 3 \quad , U4 - U3 = 3 \quad , U5 - U4 = 3 \ldots$

وهكذا ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة =3 وهو مقدار ثابت اي ان $U_{n+1} - Un = 3$

[عدد (مقدار) ثابت].

وفي المثال الثاني فان

$H2 - H1 = -5 \quad , H3 - H2 = -5 \quad , H4 - H3 = -5 \quad , H5 - H4 = -5 \quad , H6 - H5 = -5$

وهكذا ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة = 5– وهو عدد (مقدار) ثابت أي أن:

$$H_{n+1} - H_n = -5$$

اما في المثال الثالث فان :

$G2 - G1 = 3 \quad , G3 - G2 = 5 \quad , G4 - G3 = 7 \quad , G5 - G4 = 9$

نلاحظ ان ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة متغير لذا فإنها ليست متتابعة حسابية، المتتابعات التي كما في المثالين (1)، (2) والتي تحقق الشرط عدد ثابت = $U_{n+1} - Un$ [نفرض العدد الثابت **d**] تسمى متتابعة حسابية.

تعريف (2-2)

تسمى المتتابعة $\langle Un \rangle$ حسابية اذا كان $\forall n \in Z^+$ ، مقدار ثابت = $U_{n+1} - Un$

وليكن (d) اي ان $U_{n+1} - Un = d$ ونفس المعنى $U_{n+1} = Un + d$

حيث العدد الثابت d يسمى اساس المتتابعة وعليه لو كانت $\langle U_n \rangle$ متتابعة حسابية وحدها الاول $U_1 = a$ واساسها $= d$ فإن :

$$U_1 = a , U_2 = a + d , U_3 = a + 2d , U_4 = a + 3d , U_5 = a + 4d$$

ويكون حدها العام (الحد النوني)

$$U_n = a + (n-1) d$$

وعليه تكون المتتابعة

$$\langle U_n \rangle = \langle a , a + d , a + 2d , \ldots , a + (n-1) d , \ldots \rangle$$

امثلة

اكتب الحدود الستة الاولى لكل من المتتابعات الحسابية الآتية :

1) حدها الاول $H_1 = -7$ واساسها $d = 2$

$$\langle H_n \rangle = \langle -7 , -5 , -3 , -1 , 1 , 3 , \ldots \rangle$$

2) حدها الاول $U_1 = \frac{5}{2}$ واساسها $d = -1$

$$\langle U_n \rangle = \langle \frac{5}{2} , \frac{3}{2} , \frac{1}{2} , \frac{-1}{2} , \frac{-3}{2} , \frac{-5}{2} , \ldots \rangle$$

3) حدها الاول $M_1 = 10$ واساسها $d = -3$

$$\langle M_n \rangle = \langle 10 , 7 , 4 , 1 , -2 , -5 , \ldots \rangle$$

امثلة

1) اكتب الحد الثامن للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول = -3 واساسها (7)

لدينا قانون الحد العام $Un = a + (n-1)\, d$

في هذا المثال لدينا $a = -3$, $d = 7$, $n = 8$ (ترتيب الحد المطلوب)

وبالتعويض نحصل $U8 = -3 + (8-1)\,.\,7$

الحد الثامن $= -3+49$

$= 46$

2) اكتب الحد العاشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول (12) واساسها (-3)

الحل

$Un = a+(n-1).d$

$a = 12$, $d = -3$, $n = 10$

$U10 = 12+(10-1)\,.-3$

$=12-27$

$=-15$

3) استؤجر عامل في اول سنة براتب قدره (200000) دينار على ان يعطى زيادة ثابتة في نهاية كل شهر مبلغاً مقداره (15000) دينار فكم يبلغ راتبه في نهاية السنة ؟

نلاحظ ان راتب الشهر الاول = 200000 دينار

راتب الشهر الثاني = 215000 بعد الزيادة للشهر الاول

راتب الشهر الثالث = 230000 بعد الزيادة للشهر الثاني

راتب الشهر الرابع = 245000 بعد الزيادة للشهر الثالث

نلاحظ ان مبالغ الرواتب تكون متتابعة حسابية حدها الاول $a = 200000$ اساسها $d = 15000$

والمطلوب ايجاد الراتب في نهاية السنة الذي هو (Hn) حيث $n = 12$ [السنة (12) شهراً]

$Hn = a+(n-1)d$

فيكون $H12 = 200000+(12-1).15000$

$=200000+165000$

$=365000$

دينار راتبه الشهري في نهاية السنة

4) متتابعة حسابية حدها الاول=7 وحدها السادس= 8- جد اساسها واكتب الحدود الخمسة الاولى منها

$Un = a+(n-1).d$

$a = 7, U6 = -8, n = 6$

$-8 = 7+(6-1)(d)$

$-8 -7 = 5d$

$-15 = 5d$

$d = -3$

$U1 = 7 , U2 = 4 , U3 = 1 , U4 = -2 , U5 = -5$

5) في المتتابعة الحسابية ‹ 42,39,36,... › جد رتبة الحد الذي قيمته (6-) واي حد فيها يساوي صفر

$Un = a+(n-1).d$

$Un = -6 , a = 42$

$d=U2-U1= 39 - 42 = -3$

$-6 = 42 +(n-1)(-3)$

$-6 = 42- 3n+3$

$3n = 42 + 6 + 3 = 51$

رتبة (ترتيب) الحد الذي قيمته (6-) هو $n = \frac{51}{3} = 17$

اي ان $U_{17} = -6$

اذا كان $Un = 0 , a = 42 , d = -3$ المطلوب ايجاد n

$42+(n-1)(-3) = 0$

$42-3n+3=0$

$3n = 45$

$n = \frac{45}{3} = 15$

اي ان الحد الخامس عشر = صفر

$U15 = 0$

6) اذا كان الحد العاشر في متتابعة حسابية يساوي (62) واساسها يساوي (5) اكتب المتتابعة مبتدأً من الحد الاول

$Un = a + (n-1) . d$

$U10 = 62 , d = 5 , n = 10 , a = ?$

$62 = a + (10-1)(5)$

$62 = a + 45$

الحد الاول $a = 17$

$\langle Un \rangle = \langle 17 , 22 , 27 , 32 , ... \rangle$

7) جد المتتابعة الحسابية التي حدها التاسع = 5 وحدها الثالث عشر = -3

$Un = a + (n-1).d$

$U9 = 5 , U13 = -3 , a = ? , d = ?$

$5 = a + (9-1) d$

$5 = a + 8d \; .... \; 1)$

$-3 = a + (13-1)d$

$-3 = a + 12d \; ...... \; 2)$

$\mp 5 = \mp a \mp 8d$ بالطرح

$-8 = 4d$

الاساس $d = -2$ تعوض في (١)

$5 = a + 8(-2)$

$5 + 16 = a$

الحد الاول $a = 21$

المتتابعة $\langle Un \rangle = \langle 21 , 19 , 17 , 15 , ... \rangle$

8) المتتابعة $\langle 3n + 1 \rangle = \langle U_n \rangle$

توجد اربع اجابات واحدة منها صحيحة . اختر الاجابة الصحيحة :

أ) اساسها = 3 وحدها الخامس = 15

ب) اساسها = 3− وحدها الرابع = 13

جـ) اساسها = 4 وحدها الاول = 6

د) اساسها = 3 وحدها الثالث = 10

الحل

المتتابعة $\langle 3n + 1 \rangle = \langle U_n \rangle$

$\langle 4, 7, 10, 13, 16 \rangle = \langle U_n \rangle$

حدها الاول = 4 اساسها = 3

الفرع أ خطأ ، الفرع ب خطأ ، الفرع جـ خطأ

الفرع د صحيح

اذا كان لدينا العددان k,a وادخلنا بينها الاعداد المرتبة ... , b,c,g بحيث يكون ‹a,b,c,g,...,k›

متتابعة حسابية ، الاعداد ... , b,c,g تسمى اوساط حسابية للعددين a,k وبذلك يكون :

عدد حدود المتتابعة = عدد الاوساط الحسابية+ 2

والحد الاول للمتتابعة = a وحدها الاخير = k

مثال

أدخل ستة اوساط حسابية بين 2,37

عدد الحدود = 2+6=8

$U_8=37 , a=2$

$U_n=a+(n-1).d$

$37=2+7d$

$35=7d$

$d=5$

المتتابعة هي : $\langle 2,7,12,17,22,27,32,37 \rangle = \langle U_n \rangle$

الاوساط هي : 7,12,17,22,27,32

لتكن ‹Un› متتابعة حسابية اساسها (d) حدها الاول = a

$$\langle U_n\rangle = \langle U1, U2, U3, U4, \dots\rangle$$
$$= \langle a, a+d, a+2d, a+3d, \dots\rangle$$

ولنرمز لمجموع (n) من الحدود من هذه المتتابعة بالرمز (Sn) ابتداءً من الحد الاول فإن :

$$Sn = a+(a+d)+(a+2d)+\dots+(U_n-2d)+(U_n-d)+U_n \dots\dots (1)$$

ويمكن كتابة المجموع (Sn) بالشكل :

$$Sn = U_n+(U_n-d)+(U_n-2d)+\dots+(a+2d)+(a+d)+a \dots\dots (2)$$

وبجمع المعادلتين (1) ، (2) نحصل على :

$$2Sn = (a+U_n)+(a+U_n)+\dots+(a+U_n)$$

عدد المقدار U_n هو n من المرات فيكون :

$$2Sn = n(a+U_n)$$

$$Sn = \frac{n}{2}(a+U_n) \dots\dots 1$$

حيث (n) عدد الحدود ابتداءً من الحد الاول وبالترتيب الى الحد Un = an

وبما ان Un = an وان Un = a+(n−1)d وبالتعويض في (1) نحصل على ان :

$$Sn = \frac{n}{2}[2a+(n-1).d]$$

حيث عدد الحدود =n ، الحد الاول = a ، الاساس= d

امثلة

1) جد مجموع الحدود العشرة الاولى من المتتابعة

$$\langle Un\rangle = \langle 17, 22, 27, 32, \dots\rangle$$

$$Sn = \frac{n}{2}[2a+(n-1).d]$$

$$n = 10, a = 17, d = 22-17 = 5$$

$$S10 = \frac{10}{2}[2\times17+(10-1)\times5]$$

$$S10 = 5[34+45] = 5\times79 = 395$$

او بطريقة اخرى

$a = 17, n = 10, d = 22-17 = 5$

$Un = a+(n-1).d$

$U10 = 17+(10-1)\times 5$

$= 17+45 = 62$

$Sn = \frac{n}{2}[a+U_n]$

$= \frac{10}{2}[17+62] = 5\times 79 = 395$

2) بيّن نوع المتتابعة التي حدها العام $\langle Hn \rangle = \langle 2n-7 \rangle$ وأوجد مجموع الحدود الخمسة عشر الاولى منها

$Hn = 2n-7$

$H1 = 2\times 1-7 = -5$ الحد الاول

$H2 = 2\times 2-7 = -3$ الحد الثاني

$H3 = 2\times 3-7 = -1$ الحد الثالث

$H4 = 2\times 4-7 = 1$ الحد الرابع

نلاحظ ان الفرق بين كل حد وسابقه مباشرة مقدار ثابت =2 وعليه تكون المتتابعة حسابية فيها

$H1 = -5$

$d = (-3)-(-5) = 2$

$n = 15$

$S15 = \frac{15}{2}[2\times(-5)+(15-1)(2)]$

$S15 = \frac{15}{2}[-10+28]$

$= \frac{15}{2}\times[18] = 135$

3) جد عدد الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) ، (1000) والتي تقبل القسمة على (9) بدون باقٍ ثم جد مجموعها.

لايجاد اول عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق بعد (100) نقسم (100) على (9) فتقول $\frac{100}{9} = 11$ والباقي 1 ولكي يكون الباقي يقبل القسمة على (9) بدون باقي نضيف له (8) فيكون اول عدد بعد (100) يقبل القسمة على (9) وبدون باق هو (108).

ولأيجاد آخر عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق قبل (1000) نقسم (1000) على (9) فنقول $\frac{1000}{9} = 111$ والباقي (1) وعليه يكون اخر عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق $999 = 1000-1$

وعليه الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100)، (1000) والتي تقبل القسمة على (9) بدون باق تكون متتابعة حسابية هي :

$$\langle U_n \rangle = \langle 108, 117, 126, 135, \ldots, 999 \rangle$$

الآن لدينا :

$$a = 108 \,,\ d = 9 \,,\ U_n = 999 \,,\ n = ?$$

$$U_n = a + (n-1) \cdot d$$

$$999 = 108 \quad n-1)($$

$$999 = 108 \quad 9n-$$

$$999 - 99$$

$$n = \frac{900}{9} \ 100$$

مجموع الاعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على (9) بدون باق ومحصورة بين (100) ، (1000)

$Sn = \frac{n}{2} [a + Un]$

$n = 100 \ , a = 108 \ , Un = 999$

$S100 = \frac{100}{2} [108 + 999]$

$S100 = \frac{100}{2} [108 + 999]$

$= (50)(1107) = 55350$

4) جد عدد الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية التي اقل من (200) ثم جد مجموعها.

الاعداد الفردية الصحيحة الموجبة التي اقل من (200) هي $1,3,5,7,9 , \ldots , 199$

تكون متتابعة حسابية فيها : $a = 1 , d = 2 , Un = 199$

$Un = a + (n-1).d$

$199 = 1 + (n-1)(2)$

$199 = 1 + 2n - 2$

$200 = 2n$

$n = \frac{200}{2} = 100$ عدد الاعداد

$Sn = \frac{n}{2} [a + Un]$

$S100 = \frac{100}{2} [1 + 199]$

$S100 = 50 \times 200 = 10000$ مجموع الاعداد

تمارين [2 −2]

1) لكل مما يأتي اربع اجابات واحدة منها فقط صحيحة.

اختر الجواب الصحيح

أ) المتتابعة ⟨ 10−5n ⟩

1) اساسها (5) وحدها العاشر = 40−

2) اساسها (5−) وحدها العاشر = 40

3) اساسها (5−) وحدها العاشر = 40−

4) ليس اياً مما ذكر .

ب) اذا كانت ⟨ x,y,9,11,13 , . . . ⟩ متتابعة حسابية فان :

1) $Y=-7\ ,\ X=-5$

2) $Y=-7\ ,\ X=5$

3) $Y=\ 7\ ,\ X=-5$

4) $Y=7\ ,\ X=5$

2) جد الحد الثالث عشر من المتتابعة ⟨ . . . , 12, 4 , 4− ⟩

3) جد عدد الحدود والاساس للمتتابعة المنتهية التي حدها الاول =9 وحدها الاخير = 6− ومجموع حدودها = 24 .

4) جد عدد الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) ، (1000) والتي تقبل القسمة على (12) بدون باق ثم جد مجموعها .

5) رتبت مقاعد قاعة في (25) صفاً يحتوي الصف الاول على (20) مقعداً والثاني على (21) مقعداً والثالث على (22) مقعداً فما عدد المقاعد في القاعة ؟

6) جد مجموع الاعداد الصحيحة غير السالبة التي اقل من (500) .

7) اكتب الحدود الستة الاولى للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول=7 وأساسها $d = -4$ ثم جد حدها الخامس عشر ومجموع الحدود العشرة الثانية منها.

8) ضع ثمانية اعداد صحيحة بين 38 , 2 لتتكون لديك متتابعة حسابية حدها الاول = 38 وحدها الاخير=2 ثم جد مجموع هذه الاعداد.

9) اذا بدأ بالعدد 5 فان الاعداد القابلة للقسمة على (5) بدون باقي هي ...,5,10,15 ما مجموع اول (30) عدداً منها .

10) كم من الاعداد يجب ان تأخذ من المتتابعة <...,1,2,3,4> لتحصل على مجموع يساوي (5050)؟

11) جد عدد حدود المتتابعة <61 ،...، 14-, 17-, 20-> ثم جد مجموع حدودها.

12) جد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس=8 وحدها الثامن عشر =31- ثم جد مجموع الحدود العشرة الاولى منها.

13) ادخل عشرة اوساط حسابية بين 3,36

14) متتابعة حسابية حدها الثاني =71- وحدها ما قبل الاخير = 3- ومجموع حدودها = 740-
جد المتتابعة.

لنلاحظ المتتابعات الآتية :

1) $\langle 2, 6, 18, 54, 162, \ldots \rangle$

2) $\langle 64, -32, 16, -8, 4, -2, \ldots \rangle$

3) $\langle 5, 7, 9, 11, 13, \ldots \rangle$

نشاهد في المثال الاول ان :

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \frac{162}{54} = \ldots = 3$$

اي ان ناتج قسمة اي حد على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت (او عدد ثابت) هو (3) في هذا المثال

وفي المثال الثاني ان :

$$\frac{-32}{64} = \frac{16}{-32} = \frac{-8}{16} = \frac{4}{-8} = \frac{-2}{4} = \ldots = \frac{-1}{2}$$

اي ان ناتج قسمة اي حد على الحد السابق له مباشرة مقدار (عدد) ثابت في هذا المثال هو ($\frac{-1}{2}$) كل المتتابعات التي مثل هذين المثالين تسمى متتابعة هندسية اي ان المتتابعة الهندسية هي المتتابعة التي يكون فيها ناتج قسمة اي حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار (عدد) ثابت يسمى اساس المتتابعة ونرمز له بالحرف (r) وبشرط لا يوجد حد فيها قيمته صفر

اما المثال الثالث فلا يمثل متتابعة هندسية لأن $\frac{7}{5} \neq \frac{9}{7}$

تعريف (3-2)

المتتابعة ‹Un› تسمى متتابعة هندسية اذا تحقق الشرط

$$\frac{U2}{U1} = \frac{U3}{U2} = \frac{U4}{U3} = \ldots = \frac{Un}{Un-1} = r$$ عدد ثابت

يسمى اساس المتتابعة وبشرط $Un \neq 0$ لكل $n \in Z^+$

وعليه يكون في المتتابعة الهندسية $\frac{Un}{Un-1} = r$

نرمز للحد الاول للمتتابعة الهندسية ‹Un› بالرمز «a» والاساس بالرمز (r) فان

$$\langle Un \rangle = \langle U1 , U2 , U3 , U4 , \ldots, Un , \ldots \rangle$$

$$= \langle a , ar , ar^2 , ar^3 , \ldots , ar^{n-1} , \ldots \rangle$$

لأن كل حد في المتتابعة الهندسية = الحد السابق له مباشرة × الاساس

اي ان الحد العام (الحد النوني) للمتتابعة الهندسية

$$Un = r . Un-1$$

$$Un = ar^{n-1}$$

امثلة

1) اكتب الحدود الستة الاولى للمتتابعة الهندسية التي حدها الاول = 64 واساسها $\left(\frac{-1}{4}\right)$

$U1 = 64$

$U2 = U1 . r = 64 \times \frac{-1}{4} = -16$

$U3 = U2 . r = -16 \times \frac{-1}{4} = 4$

$U4 = U3 . r = 4 \times \frac{-1}{4} = -1$

$U5 = U4 . r = -1 \times \frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$

$U6 = U5 . r = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{4} = \frac{-1}{16}$

او بطريقة ثانية

$U1 = a = 64$

$U2 = ar = 64 \times \frac{-1}{4} = -16$

$U3 = ar^2 = 64 \times (\frac{-1}{4})^2 = 4$

$U4 = ar^3 = 64 \times (\frac{-1}{4})^3 = -1$

$U5 = ar^4 = 64 \times (\frac{-1}{4})^4 = \frac{1}{4}$

$U6 = ar^5 = 64 \times (\frac{-1}{4})^5 = \frac{-1}{16}$

2) جد الحد السادس في المتتابعة الهندسية ‹7,14,28 ,...›

$a=7 \quad ,r=\frac{14}{7}=2 \quad ,n=6$

$Un = a\, r^{n-1}$

$U6=7\times 2^5=7\times 32 = 224$

3) متتابعة هندسية حدها الاول = 3 وحدها الخامس = 48 جد حدها الثامن

$Un = ar^{n-1}$

$U5 = ar^4$

$3r^4 = 48$

$r^4 = 16$

$r = \pm 2$

وهذا يعني وجود جوابين [اي متتابعتين تحققان شروط السؤال]

الاولى: حدها الاول = 3 واساسها = 2

فيكون الحد الثامن $U8 = 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$

الثانية: حدها الاول = 3 واساسها = -2

فيكون الحد الثامن $U8 = 3(-2)^7 = 3\times -128 = -384$

4) اي حد في المتتابعة الهندسية ⟨2,10,50,250,...⟩ يساوي 781250

$r = \frac{10}{2} = 5$

$U_n = ar^{n-1}$

$781250 = 2 \times (5)^{n-1}$ وبالقسمة على 2

$5^{n-1} = 390625$

$5^{n-1} = (5)^8$

$n-1 = 8$

$n = 9$ رتبة (ترتيب) الحد

5) جد المتتابعة الهندسية التي حدها السابع (625) وحدها الرابع (−5)

$U_n = ar^{n-1}$

$U_7 = ar^6 = 625 \;......(1)$ الحد السابع

$U_4 = ar^3 = -5 \;.......(2)$ الحد الرابع

بقسمة طرفي المعادلة (1) على المعادلة (2) نحصل على:

$$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{625}{-5}$$

$$r^3 = -125$$

$r = \sqrt[3]{-125} = -5$ الاساس

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على

$$-5 = a \,.\, (-5)^3$$

$$a = \frac{-5}{-125} = \frac{1}{25}$$

$$\langle U_n \rangle = \langle \frac{1}{25}, \frac{-1}{5}, 1, -5, \dots \rangle$$

[1–4–2] الاوساط الهندسية Geometric Means

اذا كان لدينا العددان a,h وادخلنا بينها الاعداد المرتبة b,c,g,... بحيث يكون ‹a,b,c,g,...,h›
متتابعة هندسية ، الاعداد b,c,g,... تسمى اوساط هندسية للعددين a,h وبذلك يكون :

عدد حدود المتتابعة = عدد الاوساط + 2

الحد الاول للمتتابعة = a

وحدها الاخير = h

امثلة

1) ادخل ستة اوساط هندسية بين 5 ، 640

عدد الحدود = 2 + 6 = 8

$U_n = U_8 = 5$

$U_1 = a = 640$

$U_n = ar^{n-1}$

$5 = 640 \times r^{8-1}$

$r^7 = \frac{5}{640} = \frac{1}{128} = (\frac{1}{2})^7$

$\therefore \ r = \frac{1}{2}$

المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 640,320,160,80,40,20,10,5 \rangle$

الاوساط هي 320,160,80,40,20,10

[2-4-2] مجموع عدد معين من حدود متتابعة هندسية

تعلمنا ان المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = a واساسها = r هي :

$\langle Un \rangle = \langle a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots \rangle$

واذا اخذنا (n) حداً ابتداءاً من الحد الاول فتكون المتتابعة المختارة متتابعة منتهية هي : $\langle a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \rangle$ ولو رمزنا بالرمز Sn لمجموع هذه الحدود يكون :

$$Sn = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في (r) نحصل على

$$r\,Sn = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على

$$Sn - r\,Sn = a - a\,r^n$$

$$(1-r)\,Sn = a\,(1-r^n)$$

$$\boxed{Sn = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}}$$

بشرط $r \neq 1$

وعندما r = 1 تكون المتتابعة المنتهية التي عدد حدودها (n) هي $\langle a, a, a, \ldots a \rangle$ ويكون $Sn = na$

امثلة

1) جد مجموع الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية $\langle 3, 9, 27, 81, \ldots \rangle$

$$a = 3 ،\ r = \frac{9}{3} = 3 ،\ n = 6$$

$$Sn = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S6 = \frac{3(1-3^6)}{(1-3)}$$

$$S6 = \frac{3(1-729)}{-2}$$

$$S6 = 3 \times \frac{(-728)}{-2} = 1092$$

2) ما مجموع حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = 3 وحدها الاخير = 48 واساسها = 2

$$Un = ar^{n-1}$$

$$48 = 3 \times 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 16 = 2^4$$

$$n-1 = 4$$

$$n = 5$$

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S5 = \frac{3(1-2^5)}{(1-2)} = \frac{3(1-32)}{-1}$$

$$S5 = (-3).(-31) = 93$$

3) اذا كان مجموع الحدود الستة الاولى من متتابعة هندسية يساوي تسعة امثال مجموع الحدود الثلاثة الاولى منها فما اساس المتتابعة ؟

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S6 = \frac{a(1-r^6)}{(1-r)}$$

$$S3 = \frac{a(1-r^3)}{(1-r)}$$

$$\frac{a(1-r^6)}{(1-r)} = 9 \times \frac{a(1-r^3)}{(1-r)}$$

بالضرب في $(1-r)$

$$a(1-r^6) = 9a\,(1-r^3)$$

بالقسمة على a وتحليل $(1-r^6)$

بالقسمة على $(1-r^3)$

$$(1-r^3)\,(1+r^3) = 9\,(1-r^3)$$

$$1+r^3 = 9$$

$$r^3 = 9-1$$

$$r^3 = 8$$

$r = 2$ الاساس

4) متتابعة هندسية مجموع الحدود الثلاثة الاولى منها (26) ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها (702)

فما هي المتتابعة ؟

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S3 = \frac{a(1-r^3)}{(1-r)} = 26 \ldots\ldots (1)$$

مجموع الحدود الستة الاولى $26+702 = 728$

$$S6 = \frac{a(1-r^6)}{(1-r)} = 728 \ldots\ldots\ldots (2)$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1)

$$\frac{a(1-r^6)}{(1-r)} \div \frac{a(1-r^3)}{(1-r)} = \frac{728}{26}$$

$$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{(1-r)} \times \frac{(1-r)}{a(1-r^3)} = 28$$

$$1+r^3 = 28$$

$$r^3 = 27$$

$$r = 3$$

نعوض في المعادلة (1) نحصل

$$26 = \frac{a(1-3^3)}{(1-3)}$$

$$26 = \frac{a(1-27)}{-2}$$

$$-52 = -26a$$

$$a = 2$$

المتتابعة $\langle Un \rangle = \langle 2,6,18,54,\ldots \rangle$

طريقة ثانية

مجموع الحدود الثلاثة الاولى $a + ar + ar^2 = 26$

مجموع الحدودالثلاثة التالية :

$$ar^3 + ar^4 + ar^5 = 702$$

$$\frac{a+ar+ar^2}{ar^3+ar^4+ar^5} = \frac{a(1+r+r^2)}{ar^3(1+r+r^2)} = \frac{26}{702} \longrightarrow \frac{a(1+r+r^2)}{ar^3(1+r+r^2)} = \frac{1}{27}$$

$$r^3 = 27 \longrightarrow r = 3$$

$$a(1+3+9) = 26 \longrightarrow 13a = 26 \longrightarrow a = 2$$

[3-4-2] امثلة تطبيقية على المتتابعات الهندسية في موضوع القيمة الحالية وجملة الدفعة السنوية

الرموز المستخدمة :

المبلغ (Amount) يرمز له «A» السعر (Price) يمثل ربح المئة في سنة واحدة يرمز له «P» الربح (Profit) ويرمز له (Pr) الزمن (Time) يرمز له «T» .

الجملة هي (المبلغ + الربح) [Wholesale] وهي مايؤول اليه المبلغ الموضوع بسعر معين بعد فترة من الزمن .

القيمة الحالية [Current Value] ويرمز له «C» والربح اما يكون بسيطاً (Simple profit) او مركباً (Compound profit) .

الربح البسيط يرمز له (S.pr) ويحسب على رأس المال (المبلغ) فقط وفق القانون :

$$S.pr = \frac{A.T.P}{100}$$ حيث ان A المبلغ ، T الزمن ، P الربح

اما الربح المركب يرمز له (C.pr) يحسب على رأس المال وعلى الربح ايضاً ويمكن حساب جملة المبلغ الذي يحسب له ربحاً مركباً وفق القانون :

$$W = A(1.0P)T$$

وقد تضاف الارباح في كسور من السنة فمثلاً قد تضاف الارباح في نهاية كل ستة اشهر اي مرتين في السنة او كل اربعة اشهر اي ثلاث مرات في السنة وهكذا فيكون القانون بالشكل :

$$W = A[\ 1 + \frac{0.0P}{n}\ ]^n$$

حيث (n) عدد المرات تضاف الارباح في السنة

[2-4-4] القيمة الحالية Current value

في بعض القضايا التجارية قد يحتاج البعض الحصول على المال قبل موعد الاستحقاق لدفع المبلغ في مثل هذه الاحوال يعمدون الى تنزيل قيمة المبلغ وعندئذ يخصم من المبلغ مقداراً من المال يسمى عمولة (او تنزيل داخلي) .

فمثلاً :

اذا كان لدى احدهم كمبيالة قيمتها (A) تستحق الدفع بعد (t) من الزمن بالسنين واراد ان ينزلها عند احد المصارف فإن المصرف يأخذ عليها عمولة وهذه العمولة هي عبارة عن ربح المبلغ المعطى لصاحب الكمبيالة بحيث لو وضع بالربح المركب لمدة (t) من السنين وبسعر (%P) تصبح جملة (A) وهكذا المبلغ المعطى لصاحب الكمبيالة يسمى القيمة الحالية (C) بينما (A) يسمى القيمة اللاسمية للكمبيالة وعلى هذا فإن القيمة الحالية لمبلغ معين هي المبلغ الذي تعير جملته في نهاية المدة بمقدار المبلغ المعين وعليه يكون :

$$A = C \cdot (1.0P)^{t}$$

$$C = \frac{A}{(1.0P)^{t}}$$

$$C = A.(1.0P)^{-t}$$

امثلة

1) لدى رجل كمبيالة بمبلغ (3) ملايين دينار تستحق الدفع بعد مرور (5) سنوات ولكنه اراد ان يستلم قيمتها الان فإذا كان سعر الربح المركب 5 % في السنة فما مقدار ما يستلمه ؟

$$C = A.(1.0P)^{-t}$$

$A = 3000000 \quad , P = \%5 \quad , t = 5$

$$C = 3000000(1.05)^{-5}$$

لايجاد قيمة «C» سنستخدم اللوغارتمات (استخدم آلتك الحاسبة) كما تعلمت من الفصل السابق فيكون :

$$\text{Log } C = \text{Log } [3000000(1.05)^{-5}]$$

$$\text{Log } C = \text{Log } 3000000 + \text{Log}(1.05)^{-5}$$

$$\text{Log } C = \text{Log } 3000000 - 5 \text{ Log}(1.05)$$

$$\text{Log } C = 6.4771 - (5) \times (0.0212)$$

حيث : $\text{Log } 3 = 0.4771$

$\text{Log } 105 = 2.0212$

$\text{Log } C = 6.4771 - 0.1060$

$\text{Log } C = 6.3711 \qquad C = 2351000$

ملاحظة

نجد اللوغاريتمات اما باستخدام الحاسبة او الجداول اللوغاريتمية او تعطى في السؤال .

2) يودع رجل في نهاية كل سنة مبلغ (5) خمسة ملايين دينار ليربح ربحاً مركباً بسعر(4 %) في السنة فما مقدار رصيده عند ايداعه المبلغ العاشر ؟

الحل

الرصيد هو عبارة عن جملة عدة مبالغ متساوية ،وضعت لمدة مختلفة وعليه يكون :

الرصيد للمبلغ الاول = W1 = جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة تسع سنوات اي ان :

$$W1 = 5000000(1.04)^9$$

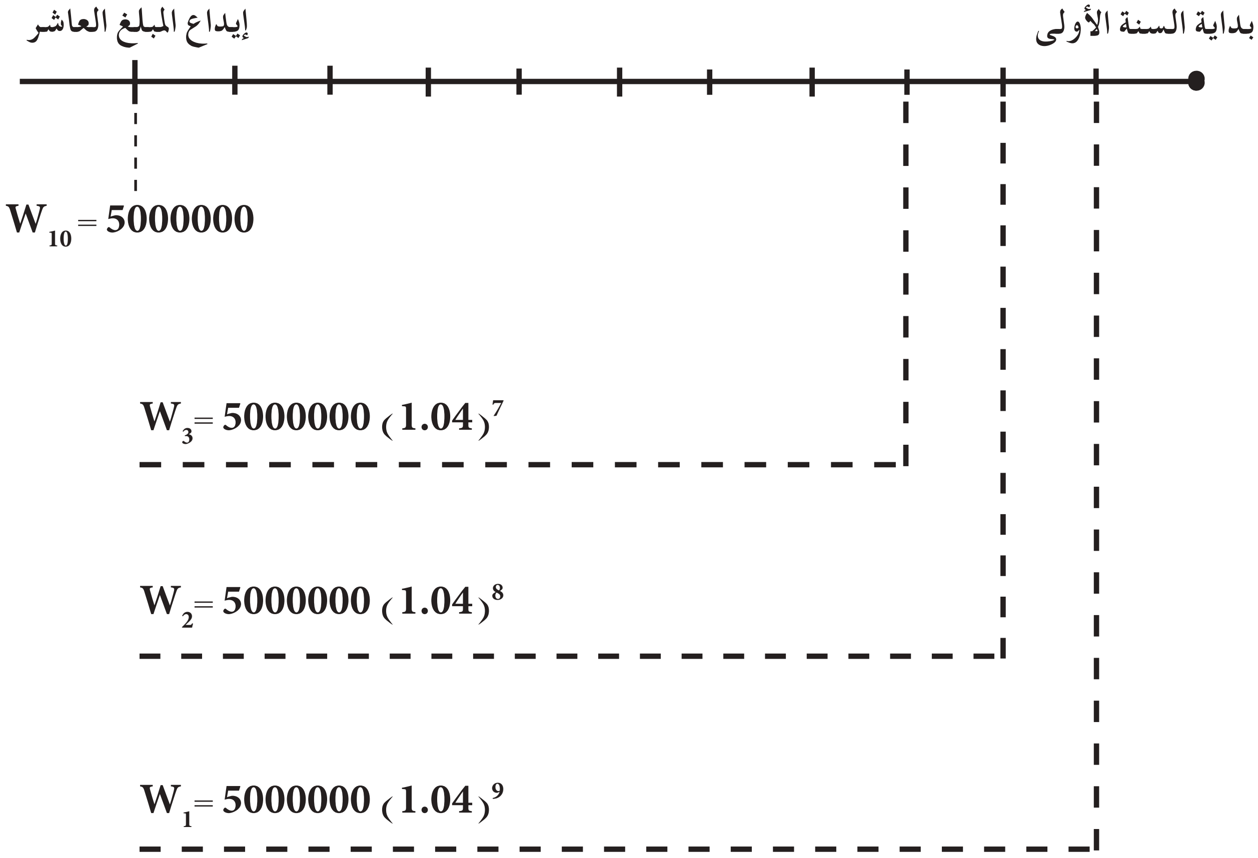
الرصيد للمبلغ الثاني = W2 = جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة ثمان سنوات اي ان :

$$W2 = 5000000(1.04)^8$$

الرصيد للمبلغ الثالث = W3 = جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة سبع سنوات اي ان :

$$W3 = 5000000(1.04)^7$$

وهكذا كما في الشكل :



ولو فرضنا ان :

$W = W1 + W2 + W3 + \ldots + W10$

فان :

$W = 5000000[(1.04)^9 + (1.04)^8 + (1.04)^7 + \ldots + 1]$

ولو نظرنا الى المقدار المحصور بين القوسين نجد أنه متتابعة هندسية يمكن اعتبار حدها الاول=1 [اخذ المجموع من اليسار]واساسها = 1.04 وعدد حدودها (10) فيكون :

$$W = 5000000\left[\frac{1(1-(1.04)^{10})}{(1-1.04)}\right]$$

$$W = 5000000\left[\frac{1-(1.04)^{10}}{-0.04}\right]$$

وباستخدام اللوغارتمات نجد قيمة (1.04) فنقول :

$$X = (1.04)^{10}$$
$$\text{Log } X = 10.\text{Log}1.04$$
$$\text{Log } X = 10 \times 0.017$$
$$\text{Log } X = 0.17$$
$$\therefore X = 1.479$$

مثال 15 احسب $\sin 15^\circ \ , \ \sin 75^\circ$

الحل:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

ثالثاً: مفكوك : $\tan(x_1 + x_2) \ , \ \tan(x_1 - x_2)$

اذا كـــــان $x_1 \ , \ x_2$ أي عددين حقيقين في مجال الدالــــــة tan وان $x_1 + x_2$ مجال الدالة tan فان:

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\sin(x_1 + x_2)}{\cos(x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2}$$

وبقسمة البسط والمقام على $\cos x_1 \cos x_2$ نحصل على:

$$\frac{\dfrac{\sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} + \dfrac{\cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}}{\dfrac{\cos x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} - \dfrac{\sin x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}}$$

$$= \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

$$\therefore \tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2} \quad \ldots\ldots 5$$

ولو عوضنا بـــ $(-x_2)$ بدلاً من (x_2) في المتطابقة (5) لحصلنا على:

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2} \quad \ldots 6$$

مثال 16 احسب $\tan 75° , \tan 15°$

الحل:

$$\tan 75° = \tan (45° + 30°)$$

$$= \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\therefore \tan 75° = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\tan 15° = \tan (45° - 30°)$$

$$= \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\therefore \tan 15° = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

نتيجة (1): لكل عدد حقيقي x فان:

a. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

c. $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

d. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

e. $\tan 2x = 2 \tan x/(1 - \tan^2 x)$

بشرط المقام ≠ صفر

مثال 17 اذا كان $\sin \propto = 4/5$, $0 < \propto < 90^o$ فاحسب :

$\tan 2\propto$, $\cos 2\propto$, $\sin 2\propto$

الحل :

$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$

$\therefore 16/25 + \cos^2 \propto = 1$

$\therefore \cos^2 \propto = 1 - 16/25$

$= 9/25$

$\therefore \cos \propto = \pm 3/5$

$\because 0 < \propto < 90^o$

$\therefore \cos \propto = 3/5$

$\therefore \sin 2\propto = 2\sin\propto\cos\propto$

$\therefore \sin 2\propto = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$

$= 24/25$

$\because \cos 2\propto = \cos^2\propto - \sin^2\propto$

$= 9/25 - 16/25$

$= -7/25$

$\because \tan 2\propto = \frac{\sin 2\propto}{\cos 2\propto}$

$\therefore \tan 2\propto = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{-24}{7}$

نتيجة (2)

لكل x عدد حقيقي فان :

1. $\sin^2 (x/2) = \frac{1 - \cos x}{2}$

2. $\cos^2 (x/2) = \frac{1 + \cos x}{2}$

مثال 18 احسب $\sin \Pi/8$ ، $\cos \Pi/8$

$$\sin^2 \Pi/8 = \frac{1 - \cos \Pi/4}{2}$$

$$= \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$$ بضرب البسط والمقام في $\sqrt{2}$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin \Pi/8 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 \Pi/8 = \frac{1 + \cos \Pi/4}{2}$$

$$\cos \Pi/8 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

مثال19 بدون : استخدام الحسابات احسب

الحل:

$\cos 105^\circ \quad , \quad \sin 105^\circ$

الحل : الزاوية 105° تقع في الربع الثاني وهي نصف الزاوية 210° وبأستخدام قانون نصف الزاوية $\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})$ نحصل على :

$$\sin 105 = \sqrt{\frac{1-\cos 210^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(180^\circ+30^\circ)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-(-\cos 30)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 105 = \sqrt{\frac{1+\cos 210^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(180^\circ+30^\circ)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+(-\cos 30^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

مثال20 بين أن:

$\cos^4 x/2 - \sin^4 x/2 = \cos x \; , \; \forall x \in R$

الحل:

$$\cos^4 x/2 - \sin^4 x/2 = (\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2)(\cos^2 x/2 + \sin^2 x/2)$$

$$= \cos\left(2\,(x/2)\right)(1)$$

$$= \cos x$$

تمارين (5 - 4)

1.

اذا كان $\tan x = 3/4$ وكانت $0 < x < 90^\circ$ فاحسب:

$\tan 2x \;,\; \cos 2x \;,\; \sin 2x$

2.

اذا اكان $0 < \alpha < \pi/2 \,,\, \sec\alpha = \sqrt{5}/2$

فاحسب: $\cot 2\alpha \,,\, \csc 2\alpha$

3.

اذا كان $90^\circ < \alpha < 180^\circ \;,\; \tan^2\alpha = 4/9$

فاحسب: $\sin(2\alpha - 90^\circ) \,,\, \cos(180^\circ - 2\alpha)$

4.

اذا كان كل من α ، β زاوية حادة موجبة بحيث $\alpha+\beta = 45^\circ$ وكان $\tan\alpha/\tan\beta = 2/3$

فاحسب: $\tan 2\alpha \,,\, \tan 2\beta$

5. اثبت أن:

$\left|\cot \alpha/2\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ ثم احسب $\cot 15^\circ$ بدون استخدام الحاسبات

6. اثبت صحة المتطابقات الآتية:

a. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

b. $\sec(x-y) = \dfrac{\sec x \sec y}{1 + \tan x \tan y}$

c. $\dfrac{\sin(-\alpha) - \sin(\beta - 90^\circ)}{-\cos(270^\circ + \alpha) + \cos\beta} + \dfrac{\sin(\alpha - 180^\circ) + \cos(-\beta)}{\sin(180^\circ + \alpha) + \sin(\beta + 90)}$

d. $\tan(270^\circ - \alpha) + \dfrac{\sin(180^\circ - \alpha)}{1 - \cos(180^\circ - \alpha)} = \csc\alpha$

e. $\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ = 1/2$

f. $\cos 35^\circ \cos 25^\circ - \cos 55^\circ \cos 65^\circ = 1/2$

g. $\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1 - \cos 4x}{8}$

h. $\sin 4x = 8 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin x$

7. احسب $\sin 3x$, $\cos 3x$ بدلالة $\sin x$, $\cos x$

[4-10] المعادلات المثلثية :

تعريف

المعادلة المثلثية هي جملة مفتوحة تحوي دالة مثلثية أو اكثر لزاوية معينة أو عدة زوايا ،
وابسط صورها هي : $\sin x = B$, $\cos x = k$ حيث $x \in R$, $B, k \in [-1,1]$

ولاً المعادلات المثلثية البسيطة :

ليكن x قياس زاوية مجهولة ، θ قياس زاوية معلومة بحيث $0 \le \theta \le 2\Pi$ ، ولندرس الحلات الثلاث الاتية :

a. $\sin x = \sin \theta \Leftrightarrow x = \theta$ or $x = \Pi - \theta$

وبالمقياس الستيني : $x = \theta$ or $x = 180^\circ - \theta$

مثال 21

اذا كان $\sin x = \sin 45^\circ$ فما قيم x ؟

الحل :

$\sin x = \sin 45^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ$ or $x = 180^\circ - 45^\circ$

أي ان : $x = 45^\circ$ or $x = 135^\circ$

مثال 22 حل المعادلة : $\sin x = 1/2$

الحل : نعلم ان $\sin 30° = 1/2$

$\sin x = \sin 30° \Leftrightarrow x = 30° \text{ or } x = 180 - 30° = 150°$

b.

$\cos x = \cos\theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ or } x = 2\Pi - \theta$
وبالقياس الستيني يعني أن : $x = \theta \text{ or } x = 360° - \theta$

مثال 23 حل المعادلة $\cos x = \cos 75°$

الحل :

$\cos x = \cos 75° \Leftrightarrow x = 75° \text{ or } x = 360° - 75°$

اي ان : $x = 75° \text{ or } x = 285°$

مجموعة الحل = $\{75°, 285°\}$

مثال 24 حل المعادلة $\cos x = -1/2$

الحل : بما أن $\cos x < 0$ $\therefore$ x تقع في أحد الربعين الثاني أو الثالث

وهي منتسبة الى كل من $180° - 60°, 180° + 60°$

لان $\cos 60 = 1/2$

$\cos x = -1/2 \Leftrightarrow x = 120° \text{ or } x = 240° \Rightarrow$ مجموعة الحل = $\{120°, 240°\}$

c.

$\tan x = \tan\theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ or } x = \Pi + \theta$
وبالقياس الستيني يعني أن : $x = \theta \text{ or } x = 180° + \theta$

مثال 25 حل المعادلة $\tan x = \tan 53°$

الحل :

$\tan x = \tan 53° \Leftrightarrow x = 53° \text{ or } x = 180° + 53°$

$x = 53° \text{ or } x = 233°$

مجموعة الحل = $\{53°, 233°\}$

مثال 26 حل المعادلة $\tan x = \sqrt{3}$

الحل :

$\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan 60°$

$\Leftrightarrow x = 60° \quad or \quad x = 180° + 60° = 240°$

مجموعة الحل = $\{60°, 240\}$

مثال 27 حل المعادلة $\tan 4x + \cot x = 0$ حيث أن $0 < x < 90°$

الحل :

$\tan 4x = -\cot x \Rightarrow$

$\therefore$ either $\tan 4x = \tan(90°+x) \Rightarrow$ (في الربع الثاني)

$4x = 90° + x \Rightarrow$

$3x = 90° \Rightarrow$

$\therefore x = 30°$

or $\tan 4x = \tan(270°+x) \Rightarrow$ (في الربع الرابع)

$4x = 270° + x \Rightarrow$

$3x = 270° \Rightarrow$

$x = 90°$ (تهمل)

مجموعة الحل = $\{30°\}$

مثال 28 حل المعادلة :

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

الحل : نحلل الطرف الايسر وكما يأتي :

$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$

either $\cos x = -2$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ يهمل لانه

or $\cos x = 1/2$

ويكون cos x موجباً في الربعين الاول والرابع

أ) في الربع الاول :

$\cos x = \cos 60° \Rightarrow x = 60°$

ب) في الربع الرابع :

$\cos x = \cos(360°-60°) \Rightarrow x = 360° - 60° = 300°$

مجموعة الحل= $\{60°, 300°\}$

ثانياً : المعادلات المثلثية من الصورة

$a \sin x + b \cos x = c$

اي انها معادلة من الدرجة الاولى بالنسبة الى (sin x) ، (cos x)

أ) المعادلات المثلثية من الصورة :

$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c \cos^2 x = d$

اي انها معادلة من الدرجة الثانية في كل من (sin x) ، (cos x)

ففي الحالة (الاولى) اذا كان احد المعاملات a,b,c يساوي صفراً فأن المعادلة تتحول الى معادلة بسيطة ويمكن حلها كما في الحالة (أولاً)

اما اذا كان كل من هذه المعاملات لا يساوي صفراً فيمكن توضيح حلها اذا كان $c^2 \leq a^2+b^2$ وكما في المثال الآتي :

مثال 29 حل المعادلة :

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$

الحل : لحل هذا النوع من المعادلات نتبع الآتي :

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\tan \Pi/3 \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$

$((\sin \Pi/3) /(\cos \Pi/3)) \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\sin \Pi/3 \sin x + \cos \Pi/3 \cos x = \sqrt{3} \cos \Pi/3$

$\cos (\Pi/3 - x) = \sqrt{3} / 2$

يكون cos x موجباً في الربعين الاول والرابع

$\therefore$ either $\cos\left(\frac{\Pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\Pi}{6}\right) \Rightarrow$

$\frac{\Pi}{3} - x = \frac{\Pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{6} = \frac{\Pi}{6}$

or $\cos\left(\frac{\Pi}{3} - x\right) = \cos\left(-\frac{\Pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{\Pi}{3} - x = -\frac{\Pi}{6}$ $\quad x = \frac{\Pi}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \left\{ \frac{\Pi}{6}, \frac{\Pi}{2} \right\}$

اما الحالة (الثانية) فنعوض عن الدوال المثلثية للزاوية بدلالة جيب وجيب تمام ضعف الزاوية فتكون :

$a \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) + b \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) + c \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right) = d$

مثال 30 حل المعادلة الآتية :

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$$

الحل : حيث ان $0° \le x < 90°$

$$2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+\sqrt{3}\,(\sin x\cos x)+3\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)=3$$

$$2-2\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+3+3\cos 2x=6$$

$$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=1$$

$$\tan\frac{\Pi}{3}\sin 2x+\cos 2x=1$$

$$\left(\left(\sin\frac{\Pi}{3}\right)/\left(\cos\frac{\Pi}{3}\right)\right)\sin 2x+\cos 2x=1 \Rightarrow$$

$$\sin\frac{\Pi}{3}\sin 2x+\cos\frac{\Pi}{3}\cos 2x=\cos\frac{\Pi}{3} \quad \Rightarrow \cos\left(\frac{\Pi}{3}-2x\right)=\cos\frac{\Pi}{3} \Rightarrow$$

cos x موجبة أما الربع الأول أو الربع الرابع فأما

$$\therefore \cos\left(\frac{\Pi}{3}-2x\right)=\cos\frac{\Pi}{3} \Rightarrow \frac{\Pi}{3}-2x=\frac{\Pi}{3} \Rightarrow x=0$$

أو

$$\cos\left(\frac{\Pi}{3}-2x\right)=\cos\left(-\frac{\Pi}{3}\right) \quad \therefore \frac{\Pi}{3}-2x=-\frac{\Pi}{3} \Rightarrow 2x=2\frac{\Pi}{3} \Rightarrow x=\frac{\Pi}{3}$$

∴ مجموعة الحل = $\{0, \frac{\Pi}{3}\}$

تمارين (6 - 4)

حل المعادلات الآتية :

1. $\sin x = \sqrt{3}/2$
2. $\cos x = \sqrt{2}/2$
3. $\tan x = \sqrt{3}/3$
4. $\sin 2x=\sin(x+\frac{\Pi}{2})$
5. $\cos 4x = \cos(x+\Pi)$
6. $\tan 4x-\cot x = 0$
7. $\tan^2 x+2\tan x+1 = 0$
8. $\cos^2 x-\cos x = 0$
9. $\cos x = 2\sin^2(x/2)$
10. $\tan 2x = 3\tan x$
11. $\cos x = \sqrt{2}\sin^2 x$
12. $2\sin^2 x = \cos 2x(4\sin 2x-1)$
13. $\cos^3 x-\sin^3 x$
14. $\sin x+\cos x = 1$

[11 – 4] رسم منحنيات الدوال المثلثية Graph of Trigonometric Functions

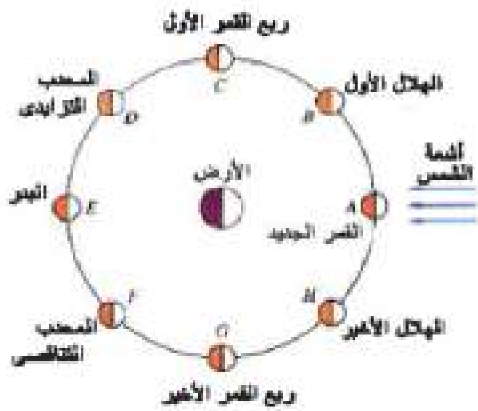
تمهيد :

كثير من الحوادث والظواهر الطبيعية تتكرر بشكل متماثل في فترات متساوية من الزمن، مثل:

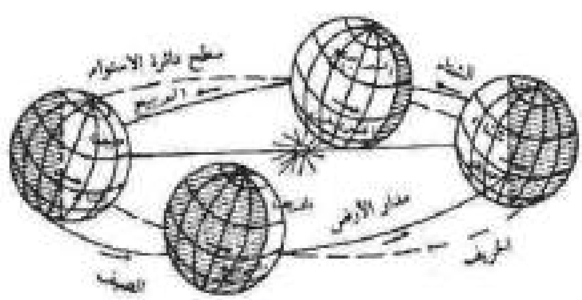
1 رؤية وجه من اوجه القمر من على سطح الارض، فنحن نراه:

هلالاً ، تربيعاً أول ، بدراً ، تربيعاً ثانياً ، محاق، .

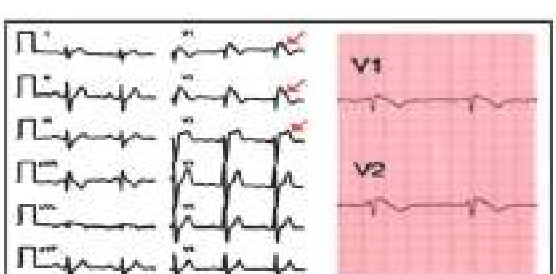
ثم يتكرر ذلك كل (29) يوماً و (12) ساعة و (44) دقيقة و (3) ثوانٍ.



2 دوران الارض حول الشمس يتكرر بصفة منتظمة كل فترة زمنية معلومة.



3 جميع حركات الموجات التي توصف بانها كهرومغناطيسية مثل موجات الضوء، موجات الراديو، كذلك الموجات التي يبثها الرادار عند عمله، جميعها موجات مستعرضة وهي تتكرر في فترات زمنية متساوية.



وان رسم الدوال المثلثية هو من النوع الذي يتكرر في دورات محدودة وذلك لان هذه الدوال هي دوالاً دورية.

اولاً: رسم منحني جيب الزاوية. $(y = \sin x)$

اذا تغير قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي، تتغير قيمة الدالة الدائرية تبعاً لها. فمثلاً اذا تغير قياس الزاوية من 0° الى 360° (او من 0 الى 2Π) فاننا نحصل على قيم مختلفة لدالة الجيب لهذه الزاوية ضمن الفترة $[-1,1]$.

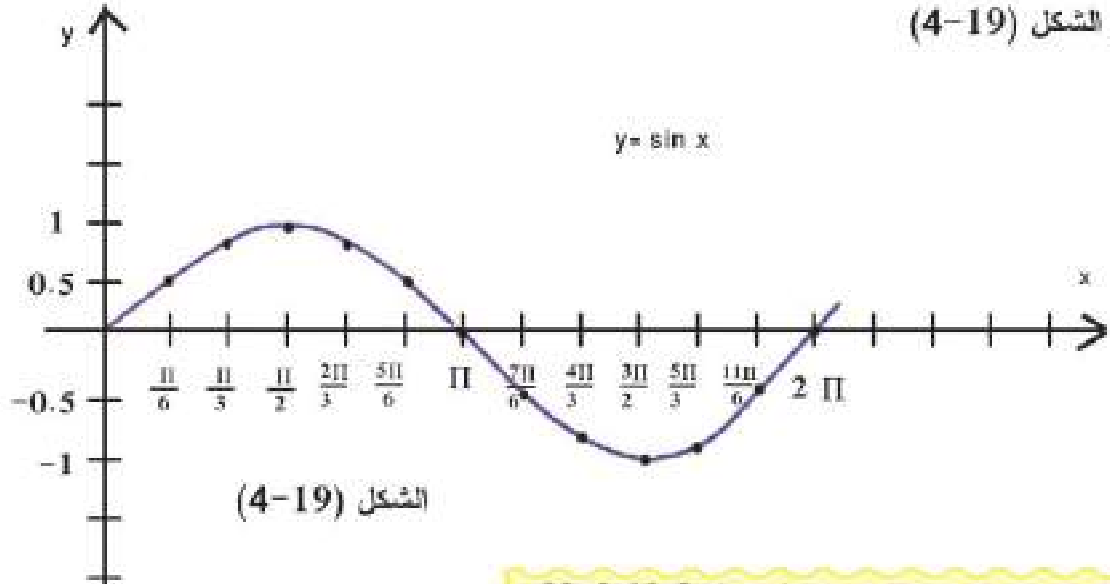
فاذا كانت y تساوي قيمة الجيب وكانت الزاوية هي x فان $y = \sin x$.

وللتمثيل البياني لدالة الجيب ننشيء جدولاً يبين قيم x والقيم المناظرة لها y.

كما في الجدول الآتي:

x	0°	30° $\frac{\Pi}{6}$	60° $\frac{\Pi}{3}$	90° $\frac{\Pi}{2}$	120° $\frac{2\Pi}{3}$	150° $\frac{5\Pi}{6}$	180° Π	210° $\frac{7\Pi}{6}$	240° $\frac{4\Pi}{3}$	270° $\frac{3\Pi}{2}$	300° $\frac{5\Pi}{3}$	330° $\frac{11\Pi}{6}$	360° 2Π
y=sinx	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5	0	- 0.5	- 0.86	-1	- 0.86	- 0.5	0

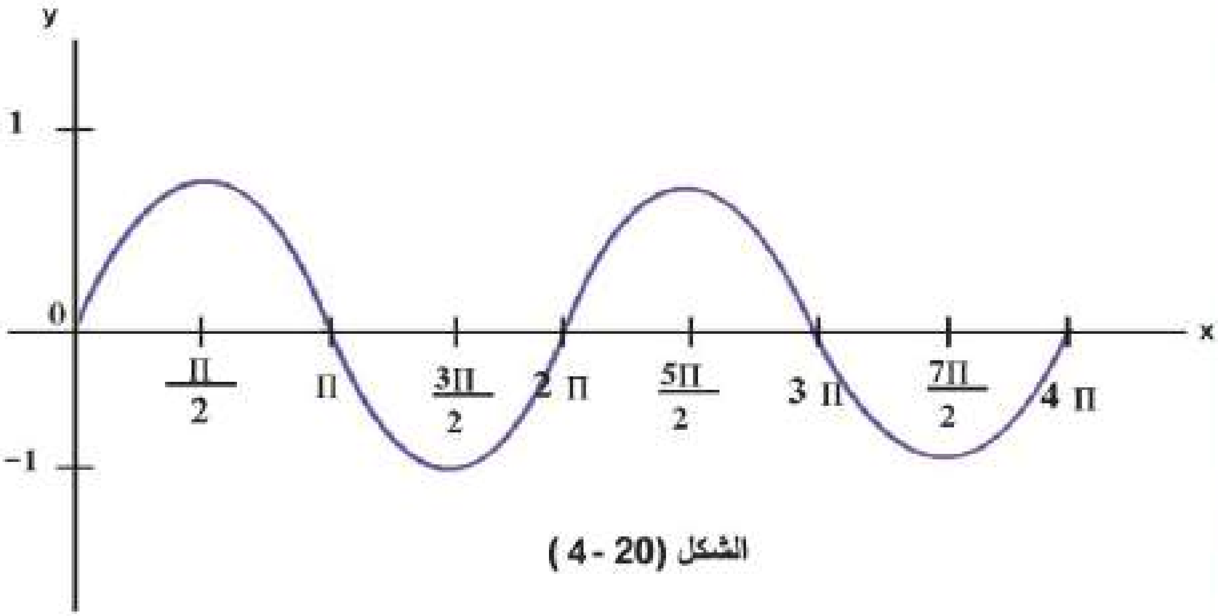
نحدد الازواج التي نحصل عليها من x , y ثم نرسم على ورقة المربعات منحني الجيب ويكون كما في الشكل (4-19)



الشكل (4-19)

خواص منحني الجيب. المجال $[0,360^\circ]$:

1. يقطع منحني الجيب محور السينات عند $x = 0^\circ$, $x = 180^\circ$, $x = 360^\circ$
2. اكبر قيمة للجيب عند $x = 90^\circ$ وتساوي 1
3. اصغر قيمة للجيب عند $x = 270^\circ$ وتساوي -1.
4. عندما $x \in (0\ ,\ 180^\circ)$ تكون قيمة $\sin x$ موجبة ويكون المنحني واقعاً اعلى محور السينات.
5. عندما $x \in (180^\circ\ ,\ 360^\circ)$ يكون قيمة $\sin x$ سالبة ويكون المنحني واقعاً اسفل محور السينات.
6. لو رسمنا $y= \sin x$ في الفترة $[2\Pi , 4\Pi]$ نجد ان بيان sin كرر نفسه.لاحظ الشكل(20 - 4)



الشكل (20 - 4)

مثل هذه الدالة نطلق عليها دالة دورية.

والفترة التي كرر فيها المنحني نفسه (2Π) تسمى دورة الدالة.

ويسمى العدد: $\frac{1}{\text{دورة الدالة}}$ بالتردد ، ويسمى العدد = $\frac{\text{اكبر قيمة - اقل قيمة}}{2}$ سعة الدالة.

أي أن: دورة الدالة $y = \sin x$ هي 2Π

وان التردد $= 1/2\Pi$

وان السعة $= \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

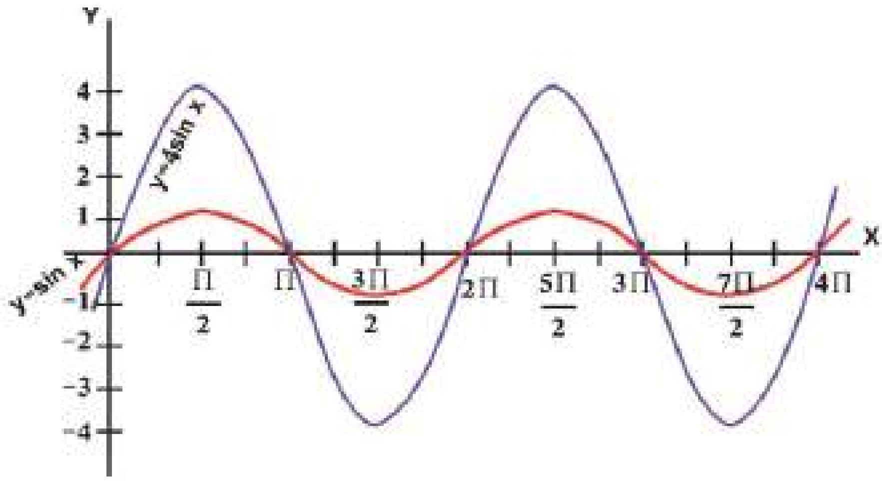
مثال:

ارسم بيان الدالة $y = 4 \sin x$ ومن الرسم جد:

أ) الدورة ب) التردد جـ) السعة

الحل: الجدول الآتي يوضح

x	0	$\frac{\Pi}{2}$	Π	$\frac{3\Pi}{2}$	2Π	$\frac{5\Pi}{2}$	3Π	$\frac{7\Pi}{2}$	4Π
sin x	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0
4sin x	0	4	0	−4	0	4	0	−4	0



دورة الدالة $y = 4 \sin x$ هي 2Π

التردد $= 1/2\Pi$

السعة $= 2/((-4) - 4) = 4$

نشاط:

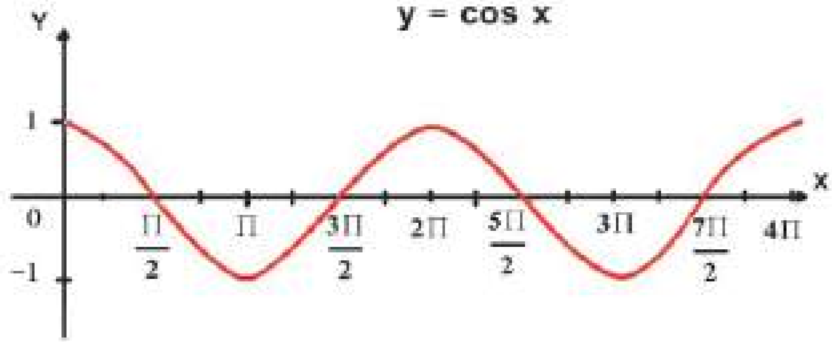
أ. ارسم بيان الدالة $y = \sin 2x$ وعين السعة والتردد والدورة.

ب. ارسم بيان الدالة $y = \sin 3x$ وعين السعة والتردد والدورة.

ثانياً: رسم بيان الدالة $y = \cos x$

الحل: نكون جدولاً يبين العلاقة بين x , $\cos x$ كما يأتي:

x	0	$\frac{\Pi}{2}$	Π	$\frac{3\Pi}{2}$	2Π	$\frac{5\Pi}{2}$	3Π	$\frac{7\Pi}{2}$	4Π
cos x	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1



لو نظرنا الى البيان في الفترة [2Π ، 0] وفي الفترة [4Π ، 2Π] نجدهما متشابهان تماماً في الفترتين أي أن بيان cos يكرر نفسه كل فترة طولها 2Π وعلى ذلك فان الدالة $y = \cos x$ دورية.

دورة الدالة $y = \cos x$ هي 2Π

التردد $= 1/2\ \Pi$

السعة = 1

نشاط:

1. ارسم بيان الدالة $y = \cos \frac{1}{2} x$ في الفترة [$4\ \Pi$ ، 0] ومن الرسم عين دورة الدالة وترددها وسعتها.

2. ارسم بيان الدالة $y = 2 \cos 4x$ في الفترة [Π ، 0]

ومن الرسم عين كلاً من دورة الدالة وترددها وسعتها.

خواص منحني الجيب التمام ($y = \cos x$)

1. يقطع محور السينات عند $x = 3\frac{\Pi}{2}$ ، $x = \frac{\Pi}{2}$

2. اكبر قيمة لجيب التمام عند $x = 0$ ، $x = 2\Pi$ تساوي 1

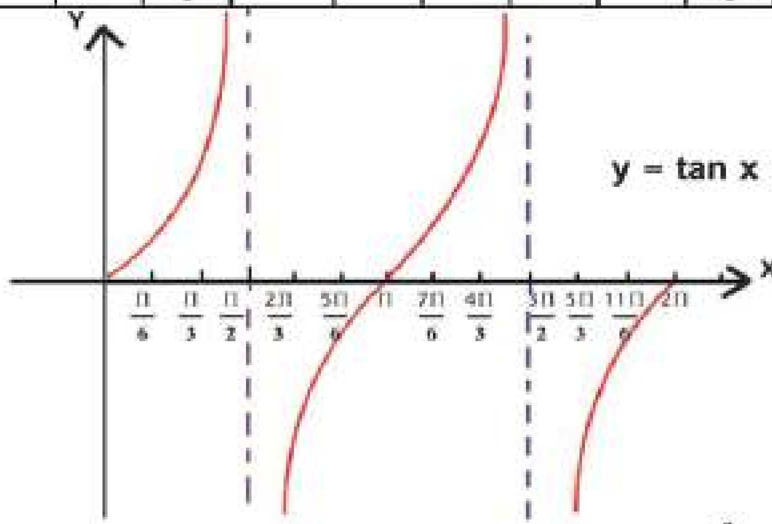
3. اصغر قيمة لجيب التمام عند $x = \Pi$ تساوي -1

4. عندما تكون x من 0 الى $\frac{\Pi}{2}$ يكون منحني الجيب التمام موجباً، اذ يكون اعلى محور السينات وعندما تأخذ x القيم من $\frac{\Pi}{2}$ الى $3\frac{\Pi}{2}$ يكون منحني الجيب تمام سالباً، اذ يكون اسفل محور السينات. وعندما تأخذ x القيم من $3\frac{\Pi}{2}$ الى 2Π يكون منحني الجيب التمام موجباً اذ يكون اعلى محور السينات.

ثالثاً: رسم منحني الظل: $(y = \tan x)$

نكون جدولاً يبين العلاقة بين x , $y = \tan x$

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{3}$	$\frac{\Pi}{2}$	$\frac{2\Pi}{3}$	$\frac{5\Pi}{6}$	Π	$\frac{7\Pi}{6}$	$\frac{4\Pi}{3}$	$\frac{3\Pi}{2}$	$\frac{5\Pi}{3}$	$\frac{11\Pi}{6}$	2Π
y=tan x	0	0.6	1.7	غير معرفة	−1.7	−0.6	0	0.6	1.7	غير معرفة	−1.7	−0.6	0



الدالة $y = \tan x$ دورية

ودورتها $= \Pi$

التردد $= 1/\Pi$

المنحني ليس محدود لا من اعلى ولا من اسفل لذا ليس له سعة

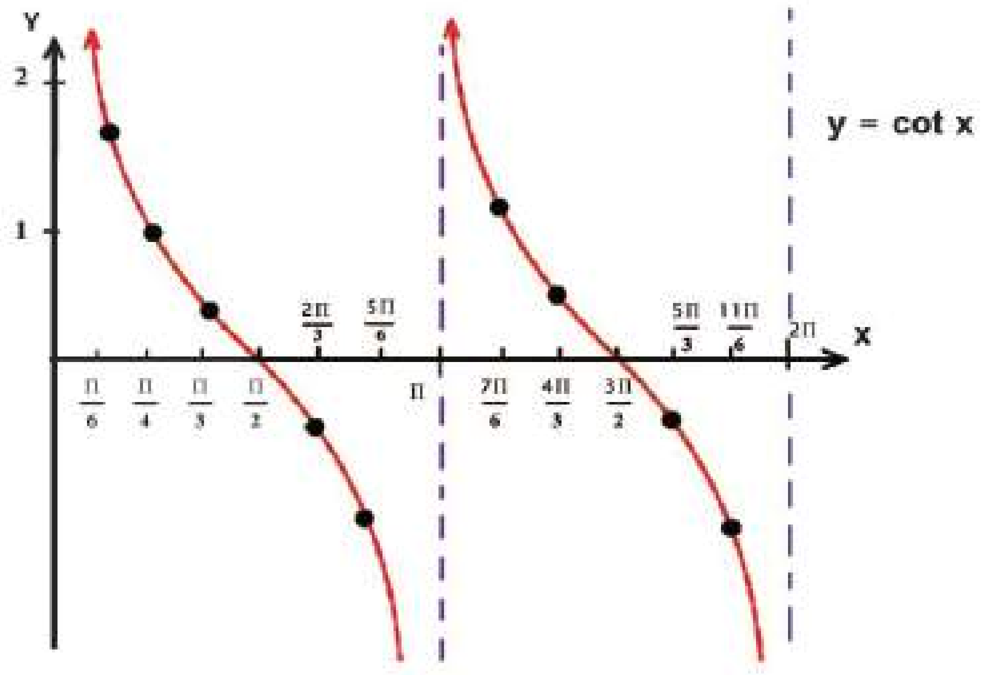
خواص منحني الظل: $y = \tan x$

1. يقطع المحور السيني عند x تساوي: 0° , 180° , 360°
2. المنحني غير متصل كما في منحني الجيب ومنحني الجيب تمام.
3. عندما تكون x بين 0° , 90° يكون الظل موجباً، وكلما اقتربنا من $x = 90^\circ$ نجد قيمة الظل تزداد ازدياداً كبيراً
4. عندما تكون بين 90° , 180° يكون الظل سالباً وعندما تقع x بين 180° ، 270° يكون الظل موجباً
5. يكون سالباً عندما تقع x مابين 270° , 360°

رابعاً: رسم منحني ظل التمام: $y = \cot x$

نكون جدولاً يبين العلاقة بين $\cot x$, x وكما يأتي:

x	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{4}$	$\frac{\Pi}{3}$	$\frac{\Pi}{2}$	$\frac{2\Pi}{3}$	$\frac{5\Pi}{6}$	Π	$\frac{7\Pi}{6}$	$\frac{4\Pi}{3}$	$\frac{3\Pi}{2}$	$\frac{5\Pi}{3}$	$\frac{11\Pi}{6}$	2Π
y=cotx	غير معرفة	1.7	1	0.6	0	-0.6	-1.7	غير معرفة	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	غير معرفة



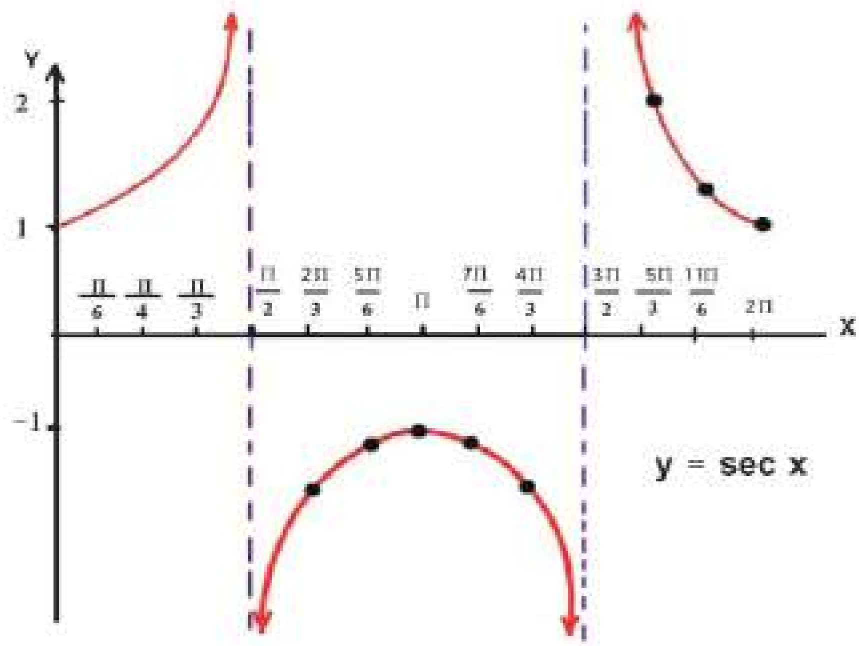
خواص منحني ظل التمام:

1. يقطع محور السينات عند $x = \frac{\Pi}{2}$, $x=3\frac{\Pi}{2}$
2. المنحني غير متصل.
3. عندما تكون x بين 0 و $\frac{\Pi}{2}$ نجد ان ظل التمام موجب، وعندما تكون x ما بين $\frac{\Pi}{2}$ و Π نجد انه سالب وعندما تكون x ما بين Π و $3\frac{\Pi}{2}$ يصبح موجباً، وعندما تكون x ما بين $3\frac{\Pi}{2}$ و 2Π يكون سالباً.

خامساً: رسم منحني قاطع الزاوية: $y = \sec x$

نكوّن جدولاً يبين العلاقة بين x , $y = \sec x$ كما يأتي:

x	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{4}$	$\frac{\Pi}{3}$	$\frac{\Pi}{2}$	$\frac{2\Pi}{3}$	$\frac{5\Pi}{6}$	Π	$\frac{7\Pi}{6}$	$\frac{4\Pi}{3}$	$\frac{3\Pi}{2}$	$\frac{5\Pi}{3}$	$\frac{11\Pi}{6}$	2Π
y-secx	1	1.2	1.4	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة	2	1.2	1



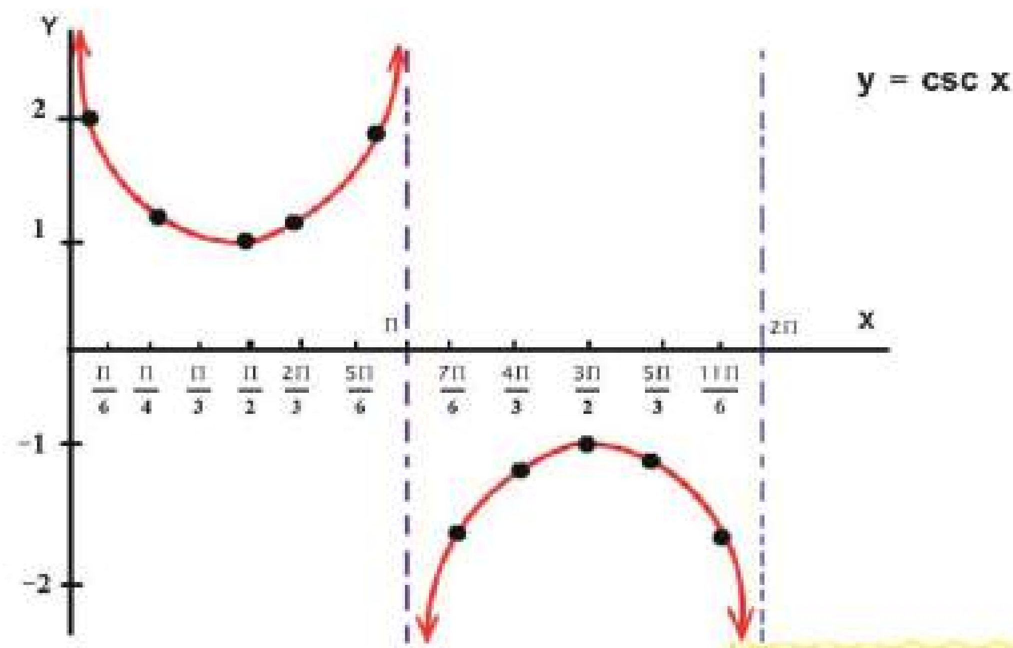
خواص منحني القاطع:

1. لا يقطع منحني القاطع محور السينات على الاطلاق.
2. عندما x ما بين 0 و $\Pi/2$ يكون المنحني موجباً.
3. عندما x ما بين $\Pi/2$ و $3\Pi/2$ يكون المنحني سالباً.
4. عندما x ما بين $3\Pi/2$ و 2Π يكون المنحني موجباً.
5. المنحني غير متصل.
6. المنحني غير محدود لا من الاعلى ولا من الاسفل لذا ليس له سعة

سادساً: رسم منحني قاطع التمام: $y = \csc x$

نكوّن جدولاً يبين العلاقة بين x , $y = \csc x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=cscx	غير معرفة	2	1.4	1.2	1	1.2	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة



خواص منحني قاطع التمام

1. المنحني لا يقطع محور السينات.
2. عندما X ما بين 0 الى π يكون المنحني موجبا اعلى محور السينات.
3. عندما X ما بين π الى 2π يكون المنحني سالبا اسفل محور السينات.
4. المنحني غير متصل.
5. دورة المنحني 2π والتردد $1\backslash 2\pi$.
6. المنحني غير محدود لا من الاعلى ولا من الاسفل لذا ليس له سعة.

تمارين (8 -4)

1. ارسم بيان كل من الدوال الاتية. ومن الرسم استنتج كلا من دورة الدالة وترددها وسعتها:

1. $y = \sin 3x$ on $[0, 4\Pi/3]$
2. $y = -\sin x$ on $[0, 2\Pi]$
3. $y = 3\sin 2x$ on $[0, 2\Pi]$
4. $y = \cos 2x$ on $[-\Pi, 2\Pi]$
5. $y = -2\cos x$ on $[-2\Pi, 2\Pi]$
6. $y = 2\cos 3x$ on $[0, 3\Pi]$
7. $y = 2\tan x$ on $[-\Pi/2, 3\Pi/2]$
8. $y = \tan 2x$ on $[0, \Pi]$

2. اختبار موضوعي

1. ضع اشارة + او − في المستطيلات التالية لتحصل على عبارة صحيحة :

a. $\cos(20^\circ + 50^\circ) = \cos 20^\circ \cos 50^\circ$ ☐ $\sin 20^\circ \sin 50^\circ$

b. $\tan(3A-2B) = \tan 3A$ ☐ $\tan 2B / 1$ ☐ $\tan 3A \tan 2B$

c. $\sin(80^\circ$ ☐ $10^\circ) = \sin 80 \cos 10^\circ - \cos 80^\circ \sin 10^\circ$

2. اكمل ما يأتي لتحصل على عبارة صحيحة

a. $\sin(40^\circ + 180^\circ) = \sin 40^\circ$ ☐ + ☐ $\sin 180^\circ$

b. $2\sin \Pi/3 \cos \Pi/3 = \sin$ ☐

c. $\dfrac{2\tan x/3}{1-\tan^2 x/3} =$ ☐

d. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos$ ☐

3. عيّن العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يأتي:

a. $\sin 6x = 2\sin 3x$

b. $\sin 15 \cos 15^\circ = \sin 30^\circ$

c. $\cos 80^\circ = \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ$

d. مجموعة حل المعادلة $2\cos x + 3 = 0$ هي $\varnothing$

4. اختر من القائمة A ما يناسبها من القائمة B

القائمة A	القائمة B
1. $\cos 4A \cos A - \sin 4A \sin A =$	a. $\sin 5A$
2. $\sin A \cos 4A - \sin 4A \cos A =$	b. $\cos 5A$
3. $\sin 4A \cos A + \cos 4A \sin A =$	c. $\sin 3A$
	d. $\sin(-3A)$

5. اختبار مقالي

1. اذا كان $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وكانت $\cos x = \frac{2}{3}$ فاوجد قيمة كل من : $\cot x, \sec x, \csc x$

2. اذا كان $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وكانت $\cos x = \frac{3}{5}$ فاوجد قيمة كل من : $\cos 2x, \sin 2x, \tan 2x, \sin(x/2), \cos(x/2)$.

3. بدون استخدام الحاسبة اوجد قيمة:

a. $\sin\pi/8 \cos\pi/8$

b. $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$

4. اثبت صحة كل من المتطابقات

a. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

b. $\tan(x/2) = (1-\cos x) / \sin x$

الفصل الخامس

Chapter 5

الغايةوالاستمرارية Limit and Continuity

[5-1] جوار العدد

[5-2] غاية الدالة

[5-3] غاية الدوال الدائرية

[5-4] الاستمرارية

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
غاية الدالة f(x) عندما $x \rightarrow a$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
إستمرارية f(x) عند $x = b$	$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$

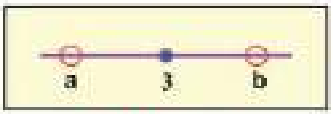
الفصل الخامس

الغاية والاستمرارية

غاية الدالة واستمراريتها limit and continuity

تمهيد :

اذا نظرنا في الشكل (1-5) نلاحظ نقطتين الاولى a تقع على يسار العدد 3 والاخرى b تقع على يمين العدد 3



شكل (1-5)

فإذا فرضنا ان a تأخذ قيماً متزايدة

$$2.9 , 2.99 .... , 2.999, ...$$

تتقارب باستمرار نحو العدد 3 من اليسار ونرمز لذلك بالرمز a نقول ان

$$a \to 3^{-}$$

واذا اعطينا b قيماً متناقصة مثل :

$$3.1 , 3.01 , 3.001 .... 3.000001 ....$$

نقول ان b تتقارب باستمرار نحو العدد 3 من اليمين ونرمز لذلك بالرمز

$$b \to 3^{+}$$

[1-5] جوار العدد neighbourhood

على ضوء ما سبق يمكنك ان تتفهم التعريف الآتي :

-1]

اذا كان a عدداً (نقطة) وكان $\in$ (تقرأ إبسلون) عدداً موجباً تسمى الفترة

1 - $(a - \in , a + \in)$ جواراً للعدد a (الجوار هنا يحوي a)

2 - $]a - \in , a]$ جواراً ايسر للعدد a (الجوار هنا يحوي a)

3 - $[a , a + \in)$ جواراً ايمن للعدد a (الجوار هنا يحوي a)

ويرمز لمجموعة الجوار بالرمز N

فمثلا

اذا كان $a = 1 , \in = 1/2$ فان

1. $(1 - \frac{1}{2} , 1 + \frac{1}{2})$ جواراً للعدد 1

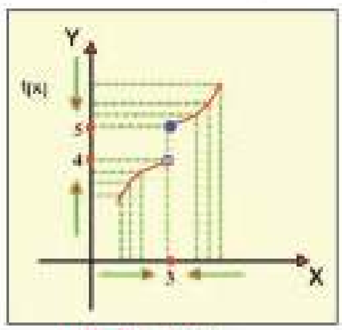
2. [1 ، $\frac{1}{2}$ -1) جواراً ايسر للعدد 1

3. ($\frac{1}{2}$ +1 ، 1] جواراً ايمن للعدد 1

[5-2] غاية الدالة (limit of a function)

تمهيد توضيحي :

سنعطي فيما يأتي توضيحاً هندسياً اي باستخدام الرسم فقط للتعريف بمفهوم الغاية إذ سنكتفي بأدراك أولي للتعريف عن طريق الحواس ثم ننتقل بعد ذلك الى التعريف المحدد ففي الشكل (2-5)



الشكل (2-5)

نلاحظ ان هناك بياناً للدالة f (منفصلة هندسياً) عندما x=3 كما يمكنك ان تلاحظ ان $y = f(x)$ تأخذ قيماً متقاربة من 4 وذلك عندما تتقارب x من 3 من اليسار وكلما اردنا ان نجعل $f(x)$ اكثر قرباً الى 4 فانه يمكننا ذلك عن طريق اعطاء x قيماً اكثر قرباً الى 3 من اليسار

وفي هذه الحالة تقول :

أن $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$

وتقرأ غاية الدالة عند 3 من اليسار تساوي 4

لاحظ :

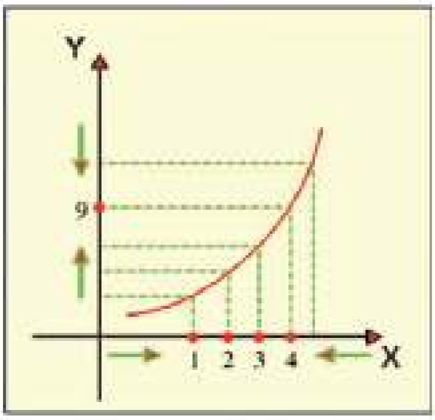
اننا لم نتعرض لذكر ما اذا كانت الدالة معرفة او ليست معرفة عند $x = 3$

كما يمكنك ان تلاحظ $f(x)$ تتقارب من 5 كلما اقتربت x الى 3 من جهة اليمين وفي مثل هذه الحالة نقول ايضاً :

غاية الدالة تساوي 5 عندما $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

تتقارب x الى 3 من اليمين وتقرا غاية الدالة عند 3 من اليمين تساوي 5

لاحظ اننا لم نذكر فيما اذا كانت الدالة معرفة او ليست معرفة عند $x = 3$



الشكل (3-5)

ملاحظة :

الدالة تتقارب من 9 عندما تتقارب x من 4 من اليسار واليمين او

$f(x)$ تتقارب من 9 عندما تتقارب xمن 4 وهذا يعني

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 9$$

وفي هذه الحالة عندما تتساوى النهايتان لدالة مثل f عند نقطة مثل 4 من اليسار واليمين

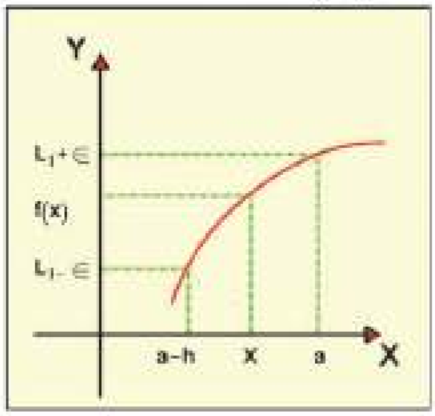
نقول ان للدالة f غاية عند 4 ونعبر عند ذلك بالصورة الرمزية .

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 9$$

الغاية عند $x \to a$

اعتماداً على ما عرضناه سابقاً في تقديم مفهوم الغاية باستخدام الرسوم التوضيحية كما في

الشكل (4-6) وقلنا بأن $\lim_{x \to a} f(x) = L$



شكل (4-5)

تفهم من هذا عموماً انه :

بأمكاننا دوماً ان نجعل $f(x)$ قريبة من L بقدر ما نشاء وذلك بأعطاء x قيماً قريبة من a من اليسار بصورة مناسبة .

فاذا اردنا اعطاء صيغة رياضية كهذا الفهم العام فهذا سيكون على النحو الاتي :

1. اذا حددنا اي معيار للقرب من L مثل $\in > 0$

2. يمكننا تحديد جوار ايسر N_1 للعدد a مثلاً $(a-h, a)$

حيث h عدد حقيقي موجب بحيث $h \leqslant \in$:

عندما

$x \in N / \{a\} \Rightarrow$

f(x) تكون قريبة من L حسب المعيار $\in$

$x \in N / \{a\} \Rightarrow | f(x) - L | < \in$

ومنه نتوصل الى التعريف الاتي :

[5-2-1] تعريف

اذا قلنا $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ فهذا يعني $\forall \in > 0$

يوجد جوار ايسر N_1 للنقطة (العدد) a

$x \in N_1 / \{a\} \Rightarrow | f(x) - L | < \in$

يمكنك ان تلاحظ بأنه لأثبات $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = L$ لابد من ايجاد الخطوات الآتية :

1. حدد مجال الدالة

2. تأكد في ضوء تحديدك لمجال الدالة فيما اذا كانت f معرفة من يسار (a) بمعنى معرف على الفترة :

$N / \{a\} = (a-h, a)$

لاحظ اننا لا نشترط ان الدالة معرفة عند a

3. اختر $\in > 0$

4. ضع $| f(x) - L | < \in$ ثم باشر بحل المتباينة السابقة فاذا استطعت ان تحدد جوراً ايسر مثل N للعدد a بحيث :

عندما تكون :

$x \in N / \{a\}$

فأن $| f(x) - L | < \in$

تكون صحيحة وبذلك تكون قد اثبت صحة المطلوب منك .

مثال

ليكن $f(x) = 2x - 1$ اثبت ان $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

الحل :

باستخدام التعريف

1. مجال $f = R$
2. بما ان f معرفة على R فهي معرفة في يسار 2 اي ان f معرفة على اية فترة مثل $(2-h\ ,\ 2)$
3. لتكن $\in > 0$
4. $|f(x) - 3| < \in$

$$|2x-1-3| < \in$$

$$|2x-4| < \in$$

$$-\in < 2x-4 < \in$$

$$4 - \in < 2x < 4+\in$$

$$2-\frac{\in}{2} < x < 2+\frac{\in}{2}$$

وهذا يعني اذا كانت :

$$x \in (2-\frac{\in}{2}\ ,\ 2+\frac{\in}{2}) \Rightarrow |f(x) - 3| < \in$$

تكون صحيحة :

فاذا اخترنا $(2-\in\ ,\ 2) = \left(2 - \frac{\in}{2} - \frac{\in}{2}\ ,\ 2+\frac{\in}{2} - \frac{\in}{2}\right)$

فنجد ان

اذا كانت $x \in N/\{2\} \Rightarrow |f(x) - 3| < \in$ تكون صحيحة

$\therefore$ الغاية المعطاة صحيحة

وبنفس الطريقة غاية الدالة عندما $x \to a$ من اليمين

[5-2-2] تعريف

اذا قلنا بأن $\lim_{x \to a} f(x) = L$ فهنا يعني $\forall \in > 0$

يوجد جوار N للنقطة a

$$x \in N/\{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \in$$

من الواضح بأنه اذا كانت :

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ فان

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

وهذا يعني ان :

1. وجود الغاية عند النقطة a يؤدي الى وجود غاية من اليسار وغاية من اليمين عند a كلتاهما متساويتان .
2. اذا وجدت غاية عند النقطة a من اليمين وغاية عند a من اليسار وكان :
   $L_1 \neq L_2$ فان الغاية عند a ليست موجودة أو لا تكون معرفة .

[5-2-3] بعض مبرهنات الغاية

فيما يأتي مجموعة من المبرهنات التي تساعد في حساب الغاية ويمكن اثبات صحتها باستخدام تعريف الغاية وكما في الامثلة السابقة ، ولكننا سنكتفي بذكر منطوق هذه المبرهنات ونستخدمها في حل امثلة واسئلة للغاية في هذه المرحلة من الدارسة .

مبرهنة (1)

اذا كان N جوار للعدد a وكانت الدالة معرفة $\forall x \in N/\{a\}$

وكانت $f(x) = C$ حيث $C \in R$ ، ثابت فان

$$\lim_{x \to a} f(x) = C$$

مثلا

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{5} = \sqrt{5} \;,\; \lim_{x \to -1} \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

مبرهنة (2)

اذا كان N جوار للعدد a وكانت الدالة $f(x) = x$ فان $\lim_{x \to a} x = a$

مثلاً

$$\lim_{x \to 2} x = 2 \quad , \quad \lim_{x \to 3} x = 3$$

مبرهنة (3)

اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة ، $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودة

فأن

- $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$
- $\lim_{x \to a} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \mp \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} [c\, f(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} [f(x) / g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x)$, $[\lim_{x \to a} g(x) \neq 0]$

أمثلة

مثال 1

$$\lim_{x \to 3} (x+2) = \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 2$$
$$= 3+2 = 5$$

مثال 2

a. $\lim_{x \to a} x^2 = [\lim_{x \to a} x]^2 = a^2$

b. $\lim_{x \to 2} (x+3)^3 = [\lim_{x \to 2} (x+3)]^3$

$= [\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3]^3$

$= [2+3]^3$

$= 125$

مثال 3

$$\lim_{x\to-1}(x^2+3x) = \lim_{x\to-1}x^2 + \lim_{x\to-1}3x$$
$$= (-1)^2+(3(-1))$$
$$= 1-3 = -2$$

مثال 4

$$\lim_{x\to-2} \frac{2x^2-4}{x-1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to-2}(2x^2-4)}{\lim_{x\to-2}(x-1)}$$

$$\frac{2(-2)^2-4}{-2-1} = \frac{8-4}{-3} = \frac{-4}{3}$$

مثال 5

لتكن $f(x) = |x-1| / x-1 \quad , \quad x \neq 1$ جد ان امكن .

$$\lim_{x\to1} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 / x-1 = 1 & , \ x > 1 \\ -(x-1) / x-1 = -1 & , \ x < 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} 1 = 1 = L_1 \\ \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} -1 = -1 = L_2 \end{aligned}\right\}$$

$\therefore L_1 \neq L_2 \Leftrightarrow \lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

مثال 6

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & , \quad x \geq 1 \\ 5x & , \quad x < 1 \end{cases}$$

جد :

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

الحل :

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2+4) = 4+4 = 8$

2. $$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} (x^2+4) = 1+4 = 5 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 1} (5x) = 5 \times 1 = 5 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1 = L_2 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ الغاية موجودة

مثال 7

جد :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2)$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

مثال 8

جد : $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(x - a)}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{(x - a)} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} 1 / \sqrt{x} + \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

مثال 9

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} bx^2+3 & , x \le 2 \quad \text{اذا كانت} \\ c - 2x & , x > 2 \quad \text{اذا كانت} \end{cases}$$

اذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 11$ جد قيمة $b , c \in R$

الحل :

$\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 11$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (c - 2x) = c - 4 \Rightarrow c - 4 = 11 \Rightarrow c = 15$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (bx^2 + 3) = 4b + 3 \Rightarrow 4b+3 = 11 \Rightarrow b = 2$$

[3−5] غاية الدوال الدائرية limit of circular function

لقد تعلمت ان الدوال الكثيرة الحدود مستمرة عند اية نقطة من نقاط مجالها في هذا البند سنتناول دراسة غايات ومشتقات الدوال الدائرية ونبدأ بايجاد

$$\lim_{x\to 0} \sin(x / x)$$

مبرهنة (1) :

$\lim_{x\to 0} \sin(x / x)= 1$ حيث x بالقياس الدائري

البرهان :

cb < cd طول القوس < dh

$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$

بضرب طرفي التراجحة بـــ (sin x)

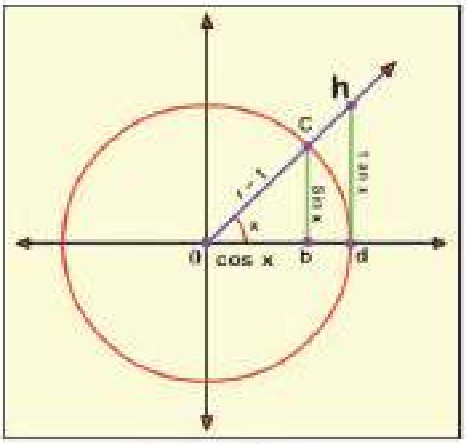
$\Rightarrow 1/\sin x > 1/x > \cos x / \sin x$

$\Rightarrow 1 > \sin(x / x) > \cos x$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} 1 > \lim_{x\to 0} \sin(x / x) > \lim_{x\to 0} \cos x$

$\Rightarrow 1 > \lim_{x\to 0} \sin(x / x) > 1$

$\therefore \lim_{x\to 0} \sin(x / x)= 1$



الشكل (5−5)

مبرهنات غايات الدوال الدائرية

1. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$
2. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$
4. $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$
5. $\lim_{x\to 0} \sin ax/ ax = 1$
6. $\lim_{x\to 0} \tan a x / ax = 1$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

مثال 1

جد :

$$\lim_{x\to 0} \sin 3x / 4x$$

الحل :

$$= 1/4 \lim_{x\to 0} \sin 3x / x$$

$$= 3/4 \lim_{x\to 0} \sin 3x / 3x = 3/4 \times 1 = 3/4$$

مثال 2

جد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{x \tan 2x}$$

الحل :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2}}{\frac{x \tan 2x}{x^2}}$$

$$= \frac{4 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x}}{2 \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x}}$$

$$= \frac{4 \times 1 \times 4 \times 1}{2 \times 1} = 8$$

مثال 3

جد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x + \tan 3x}{\sin 5x}$$

الحل :

بقسمة البسط والمقام على (x)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan 4x}{x} + \frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$= \frac{4 \lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{4x} + 3 \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{(4\times 1 + 3\times 1)}{5\times 1} = \frac{4+3}{5} = \frac{7}{5}$$

مثال 4

$$\lim_{x\to 0} (1-\sqrt{\cos 2x})/x^2$$

الحل :

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} \right) \times \left(\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos 2x}} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)}{x^2 (1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2 (1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= 2 \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to 0} (1+\sqrt{\cos 2x})} = 2 \frac{1\times 1}{1+1} = 1$$

تمارين (1-5)

1. جد الغاية لكل مما يأتي:

a. $\lim_{x\to 3} \frac{(x^2 - x - 6)}{(x - 3)}$

c. $\lim_{x\to 1} \frac{(x^3-1)}{(2x - 2)}$

b. $\lim_{x\to 1} (3x - 4)$

e. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2-9}$

d. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x+5} - 3}$, $\{x: x \geq -5\}/\{4\}$

2. اذا كان : $f: R \to R$

جد $\lim_{x\to 1} f(x)$ حيث $f(x) = |x-1|$

3. $f: R \to R$:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{اذا كانت } x > -1 \\ x^2 + 3 & \text{اذا كانت } x < -1 \\ 4 & \text{اذا كانت } x = -1 \end{cases}$$

أ) ارسم المخطط البياني لهذه الدالة

ب) هل للدالة غاية عند -1 بين ذلك ؟

جـ) جد $\lim_{x\to \sqrt{2}} f(x)$

4.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{اذا كانت } x > -1 \\ 6 & x = -1 \\ 4x + b & \text{اذا كانت } x < -1 \end{cases}$$

اذا كانت $\lim_{x\to -1} f(x) = 3$ جد قيمة $a , b \in R$

5. اذا كان $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$

$f(x) = x^2 + 6$

جد $\lim_{x \to 0} (g/f)(x)$

$\lim_{x \to 0} (g \cdot f)(x)$

6. جد الغاية لكل مما يأتي :

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x^2}{\sin^2 x}$

b. $\lim_{x \to 0} [\sin 2x + \frac{\tan 4x}{6x}]$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

d. $\lim_{x \to 0} [\frac{3x}{\sin 2x} + \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 x}]$

[5-4] الاستمرارية continuity

تكون الدالة مستمرة عند $x = b$ اذا حققت الشروط الثلاث التالية :

1. $f(b)$ معرفة
2. $\lim_{x \to b} f(x)$ موجودة
3. $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$

تعريف:

يقال للدالة f مستمرة اذا كانت مستمرة في جميع عناصر مجالها .

مثال 1

اذا كانت $f(x) = 8 - x^3 - 2x^2$ اثبت ان الدالة مستمرة .

الحل:

$\forall \ b \in R$

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} (8 - x^3 - 2x^2)$$
$$= 8 - b^3 - 2b^2$$

$$f(b) = 8 - b^3 - 2b^2$$

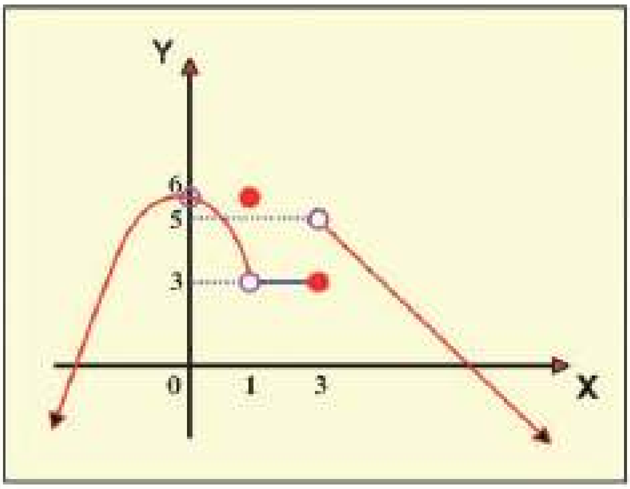
$$\therefore \lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = b$ لكن b تمثل كل عنصر من عناصر المجال

$f(x)$ مستمرة $\forall \ x \in R$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة

مثال 2



نلاحظ من الشكل المجاور:

1. الدالة غير معرفة عند $x = 0$

$\Leftarrow$ الدالة غير مستمرة عند $x = 0$

2. $f(1) = 6 \ , \ \lim_{x \to 1} f(x) = 3$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$$

$\therefore$ الدالة غير مستمرة عند $x = 1$

3. $\lim_{x \to +3} f(x) \neq \lim_{x \to -3} f(x)$

$\therefore$ الدالة غير مستمرة عند $x = 3$

[5-4-1] تعريف:

يقال للدالة f مستمرة عن يسار b اذا كانت معرفة عن يسار b ،اذا حققت :

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

[5-4-2] تعريف:

يقال للدالة f مستمرة عن يمين b اذا كانت معرفة عن يمين b ،اذا حققت :

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$$

[5-4-3] تعريف:

يقال للدالة f مستمرة على الفترة المغلقة [a,b] اذا حققت ما يأتي :

1. الدالة مستمرة على الفترة المفتوحة (a,b) .
2. الدالة مستمرة عن يمين a وعن يسار b .

مثال 3

$f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 \ , & x \geq 2 \\ 8 - x \ , & x < 2 \end{cases}$$

اثبت ان الدالة مستمرة على R .

1. نثبت ان الدالة مستمرة عند $x = 2$

$f(2) = (2)^2 + 2 = 6$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} (x^2 + 2) = 4 + 2 = 6 = L_1 \\ \lim_{x \to 2^-} (8 - x) = 8 - 2 = 6 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 6$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$\therefore$ f مستمرة عند $x = 2$

.2 $\forall \ a > 2$

$$f(a) = a^2 + 2$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^2 + 2) = a^2 + 2$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

∴ الدالة مستمرة عند $x = a$

∴ الدالة مستمرة $\forall \ x > 2$

.3 $\forall \ a < 2$

$$f(a) = 8 - a$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (8 - x) = 8 - a$$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

∴ الدالة مستمرة عند $x = a$

∴ الدالة مستمرة $\forall \ x < 2$

الدالة مستمرة عند $x = 2$ ، عند $x > 2$ ، عند $x < 2$

∴ الدالة مستمرة في R

مثال 4: اثبت ان الدالة $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ مستمره على الفترة المغلقة **[-1 , 1]**.

الحل :

(1) واضح أن الدالة f مستمرة على الفترة المفتوحة (1 , 1-) وذلك لأنها مستمرة في كل نقطة من نقاط هذه الفترة .

فمثلاً لو اخذنا $x = 0$ فإن :

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{1 - x^2} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{1 - x^2} = 1 = f(0)$$

(2) الدالة f مستمرة عن يسار النقطة $x = 1$ وذلك لأن

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1)$$

(3) الدالة f مستمرة عن يمين النقطة $x = -1$ وذلك لأن :

$$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$$

اذن تكون الدالة f مستمرة على الفترة المغلقة [-1,1] .

تمارين (2-5)

1.

$f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & , \ x \geq 1 \\ 4x + 1 & , \ x < 1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 1$, $x = -1$

2.

$f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , \ x \neq 2 \\ 3 & , \ x = 2 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 2$

3. اذا كان $f: R \to R$ ابحث استمرارية الدالة على R .

$f(x) = | 2x - 6 |$

4. لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & , \ x < \sqrt{2} \\ x^2 + 1 & , \ x > \sqrt{2} \\ 4 & , \ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = -1$, $x = \sqrt{2}$

5. لتكن $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 3$, $x = -3$, $x = 1$

6. اذا كانت الدالة مستمرة عند $x = 1$, $f(-1) = 5$ جد قيمة $a, b \in R$

$$f(x) = \begin{cases} 2a + x^2 & , \ x \geq 1 \\ 2x + b & , \ x < 1 \end{cases}$$

الفصل السادس

Chapter 6

The Derivative المشتقات

* نبذة تاريخية
* [1−6] التفسير الهندسي للمشتقة .
* [2−6] تطبيقات فيزيائية على المشتقة .
* [3−6] قواعد المشتقة .
* [4−6] قاعدة السلسلة .
* [5−6] معادلة المماس للمنحني والعمود على المماس .
* [6−6] الإشتقاق الضمني .
* [7−6] مشتقات الدوال الدائرية .

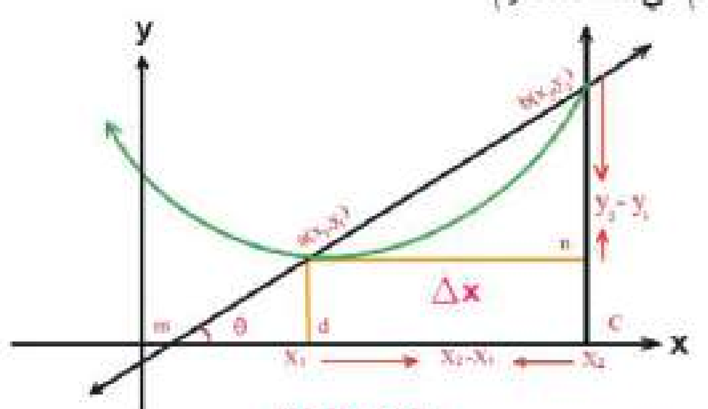
المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
مشتقة الدالة f(x)	$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
السرعة	$V(t)=\dfrac{ds}{dt}$
التعجيل	$g(t)=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$
قاعدة السلسلة	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dn}\cdot\dfrac{dn}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dn}\div\dfrac{dx}{dn}$
تركيب الدالتين f(x) , g(x)	$(fog)(x)=f(g(x))$

الفصل السادس

المشتقات The Derivative

نبذة تاريخية :

إن أهم الاكتشافات الرياضية في القرن السابع عشر هي اكتشاف حسبان التفاضل والتكامل من قبل اسحق نيوتن وكوتفريد وليم ليبننتز الذي بهذا الاكتشاف وصلت الرياضيات الى مستوى متقدم ، ويكون عندها انتهاء تاريخ الرياضيات الاولية بصورة رئيسة.
وقد ظهرت في البداية فكرة التكامل وذلك مع ايجاد مساحات مناطق وحجوم اجسام واطوال اقواس معينة ، ثم وجد التفاضل بعد فترة من علاقات المسائل على مماسات لمنحنيات، ومع اسئلة حول القيم العظمى والصغرى للدوال. وقد لوحظ اخيراً بإن هناك علاقة بين التكامل والتفاضل وانهما عمليتان عكسيتان.
وسنتناول في هذا الفصل مفهوم "الإشتقاق" من مسألتين شغلتا اهتمام الرياضيين الاوائل في القرن السابع عشر ومنهم العالم الالماني ليبنتز الذي نشر بحثاً وذلك في سنة 1684 للميلاد ، تطرق فيه الى مفهوم مشتقة الدالة، وقد عرّفها بميل المستقيم (غير الموازي للمحور الشاقولي) اي ان المسألة الأولى التي سنتناولها تتعلق بالمماس للمنحني عند نقطة عليه. والمسألة الثانية فهي فيزياوية تتعلق بحركة جسم في خط مستقيم.



الشكل (1-6)

[1-6] التفسير الهندسي للمشتقة

لتكن $a(x_1, y_1)$ ، $b(x_2, y_2)$ من نقط الدالة f

ليكن $\overleftrightarrow{ab}$ قاطعاً لمنحني الدالة في (a) و (b)

$\overleftrightarrow{ab}$ يصنع زاوية قياسها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \overleftrightarrow{ab} \text{ ميل } = \operatorname{Tan} \theta$$

في $\triangle$ abn القائم في n

cd = an

$\triangle x = x_2 - x_1 = an$

$\triangle y = y_2 - y_1 = bn$

m ∢ ban = m ∢ bmc

$y_2 = f(x_2) \quad , \quad y_1 = f(x_1)$

$\triangle x = x_2 - x_1$

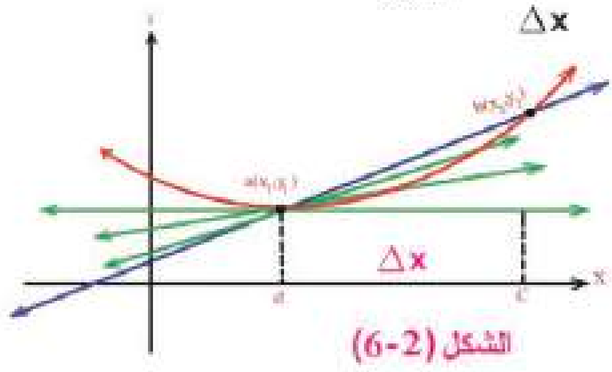
$x_2 = x_1 + \triangle x$

$$\operatorname{Tan} \theta = \overleftrightarrow{ab} \text{ ميل } = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}$$

اذا تصورنا بأن نقطة b (أخذت بالأقتراب) قرباً كافياً من النقطة a لوجدنا x $\triangle$ اخذت تتقارب من عدد صغير جداً جداً حتى كادت ان تكون b هي a فإن $\triangle x \to 0$

فيقال لمثل هذه الحالة بانها الغاية للدالة $\dfrac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}$ عندما $\triangle x \to 0$

أو بتعبير رياضي : $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y}{\triangle x}$



الشكل (2-6)

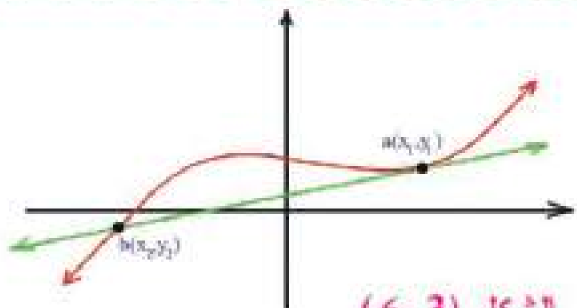
ان هذه الغاية إن وجدت فهي تمثل المشتقة عند النقطة (x_1 , y_1) وهي تساوي ميل المماس عند النقطة ويعبر عنها باحدى التعابير الاتية :

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

يصح لنا القول ان المشتقة عند نقطة التماس تساوي ميل **(Slope)** المماس عندها .

ملاحظة :

التماس في المنحنيات يختلف عن مفهوم التماس في الدوائر .كما في الشكل (3-6)



الشكل (3-6)

مثال 1

اذا كان

$$f(x) = x^2 + 5x + 3$$

جد $f'(2)$ مستخدماً التعريف

الحل :

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 + 5(2 + \Delta x) + 3 - 17}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 10 + 5\Delta x - 14}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\therefore f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(9+\Delta x)}{\Delta x} = 9$$

مثال 2

$$f(x) = \sqrt{x+3} \qquad x \ge -3$$

جد : $f'(1)$ باستخدام التعريف .

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1+\Delta x+3} - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - 2}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{4+\Delta x}+2}{\sqrt{4+\Delta x}+2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+\Delta x - 4}{\Delta x\,(\sqrt{4+\Delta x}+2)}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

مثال 3

$f(x) = \dfrac{3}{x}$ $\quad x \neq 0 \quad$ جد $f'(x)$ باستخدام التعريف .

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

جدول المصطلحات

عربي	انكليزي
1ـ الدالة الاسية	Exponential Function
2ـ الدالة اللوغارتمية	Logarithmic Function
3ـ اللوغارتمات العشرية	Decimal _Logarithms
4ـ اللوغارتمات الطبيعية	Natural Logarithms
5ـ الحاسبة اليدوية	Calculator
6ـ الوسط الهندسي	Geometric mean
7ـ المتتابعات	Sequence
8ـ الاعداد الصحيحة	Integers
9ـ الاعداد الطبيعية	Natural Numbers
10ـ الدالة	Function
11ـ مجال الدالة	Domain
12ـ المجال المقابل	Codomain
13ـ الاعداد الحقيقية	Real Numbers
14ـ المتتابعات العددية (الحسابية)	Arithmetic Sequens
15ـ الاوساط الحسابية	Arithmetic means
16ـ المتتابعات الهندسية	Geometric Sequences
17ـ الاوساط الهندسية	Geametric means
18ـ المبلغ	Amount
19ـ السعر	Price
20ـ الربح	Profit
21ـ الزمن	Time
22ـ الجملة	Wholesale
23ـ القيمة الحالية	Current Value
24ـ الربح البسيط	Simple profit

جدول المصطلحات

عربي	انكليزي
25_ الربح المركب	Compound Profit
26_ متتابعة منتهية	Finite Sequence
27_ متتابعة غير منتهية	Infinite Sequence
28_ الحد العام	General Term
29_ المصفوفات	Matrices
30_ الصف	Row
31_ العمود	Column
32_ رتبة المصفوفة	Order of amatrix
33_ المصفوفة المربعة	Square Matrix
34_ المصفوفة الصفرية	Zero Matrix
35_ مصفوفة الوحدة	Unit Matrix
36_ المصفوفة الاحادية	Singular Matrix
37_ جمع المصفوفات	Addition of Matrix
38_ النظير الجمعي للمصفوفة	Additive Invers
39_ المحددات	Determinants
40_ المعادلات الانية	Simultaneou Equations
41_ مقاييس التشتت	Measures of Disperssion
42_ الانحراف المعياري	Standard devintion
43_ الارتباط	Correlation
44_ الارتباط الخطي	Linear Correlation
45_ معامل الارتباط	Correlation coeffcient
46_ الانحدار	Regression